CUADERNOS DE TRABAJO

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Cálculo de la resolvente y suma de productos combinados en el caso hermitiano

Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

Cuaderno de Trabajo número 05/2019

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Facultad para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Facultad www.ucm.es/BUCM/est/, en la página del Repositorio Institucional UCM E-Prints Complutense y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO:

Biblioteca de la Facultad de Estudios Estadísticos

Universidad Complutense de Madrid

Av. Puerta de Hierro, S/N

28040 Madrid

Tlf. 913944035

buc_est@buc.ucm.es

ISSN: 2341-2550

Cálculo de la resolvente y suma de productos combinados en el caso hermitiano

Venancio Tomeo Perucha
Dpto. Álgebra, Geometría y Topología
Facultad Estudios Estadísticos, UCM
tomeo@ucm.es

Emilio Torrano Giménez
Dpto. Matemática Aplicada
Escuela Superior de Ingenieros Informáticos, UPM
emilio@fi.upm.es

4 de diciembre de 2019

Resumen:

En este trabajo se calcula la expresión de la resolvente de las secciones finitas y se demuestra una fórmula que conecta los polinomios ortogonales con los polinomios asociados. Esta fórmula generaliza un teorema de Van Assche para los polinomios ortogonales que satisfacen una relación de recurrencia a tres términos.

Como consecuencia se prueba una fórmula para la traza que extiende a los polinomios complejos una análoga de las secciones finitas de la matriz de Jacobi.

Se proponen también otras aplicaciones, en particular una generalización de una fórmula de Belmehdi similar a la de Christoffel-Darboux.

Palabras clave:

Polinomios ortogonales, polinomios asociados, matrices hermitianas definidas positivas (HDP), matrices de momentos, matrices de Hessenberg, matrices tridiagonales, relaciones de recurrencia largas, suma de productos combinados, fórmulas de la traza, propiedades de extracción.

Contenido

1. Introducción

Sea $M = (c_{ij})_{i,j}^{\infty}$ es una matriz compleja hermitiana infinita y definida positiva, en lo sucesivo *HPD,* es decir, tal que los menores

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} & \cdots & c_{n,0} \\ c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n,n-1} \\ c_{0,n} & c_{1,n} & \cdots & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

son positivos para todo n. Una tal matriz define en el espacio vectorial, Π, de los polinomios con coeficientes complejos un producto escalar, sin más que poner $\langle z^m, z^n \rangle = c_{m,n}$ y extendiéndolo por linealidad. En este espacio prehilbert la sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ dada por

$$P_n(z) = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} & \cdots & c_{n,0} \\ c_{01} & c_{11} & \cdots & c_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0,n-1} & c_{1,n-1} & \cdots & c_{n,n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix},$$

si $n \geq 1$ y $P_0(z) = 1$ es ortogonal y se denomina *sucesión de polinomios ortogonales* definida por la matriz M.

La correspondiente sucesión de polinomios mónicos $\{\widetilde{P}_n(z)\}$ está dada por $\widetilde{P}_n(z) = P_n(z)/\triangle_{n-1}$ y además, normalizando la sucesión, tendremos los polinomios $\{\widehat{P}_n(z)\}$ dados por $\widehat{P}_n(z) = P_n(z)/\sqrt{\triangle_n \triangle_{n-1}}$, que llamamos polinomios ortogonales normalizados. De acuerdo con esto la norma de los mónicos verificará $||\widetilde{P}_n(z)||^2 = \triangle_n/\triangle_{n-1}$ con $\triangle_0 = c_{00}$ y $\triangle_{-1} = 1$.

Si $M = (c_{ij})_{i,j}^{\infty}$ es una matriz *HDP* y $M_n = T_n T_n^H$ es la descomposición de Cholesky de M_n, por ser hermitiana definida positiva la matriz T_n es inversible y podemos definir, véase [8] o [9], la matriz de Hessenberg asociada a M

$$D_n = T_n^{-1} M_n' T_n^{-H}$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. $\widetilde{P}_n(z) = |I_z z - D_n|$, es decir los autovalores de D_n son los ceros de $\widetilde{P}_n(z)$.

2. D_n es Hessenberg superior y si $D_n = (d_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, es $d_{i+1,i} = \sqrt{|M_{i+1}||M_{i-1}|/|M_i|}$. Lo que nos lleva además a que los elementos de la subdiagonal son reales y positivos.

3. $D_n = (D_{n+1})_n$
Esta propiedad es especialmente interesante porque permite definir una sucesión de matrices de Hessenberg $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ de orden creciente tal que cada una de ellas es submatriz principal de la siguiente, es decir, permite definir la matriz infinita $D = (d_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, como matriz asociada a la matriz hermitiana definida positiva M.

4. La matriz D corresponde al operador "multiplicación por z" en Π respecto de la base ortonormal $\{\widehat{P}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ asociada a M.

5. Asimismo puede obtenerse, véase [9], la matriz M normalizada (con $c_{00} = 1$) a partir de la matriz D mediante $c_{ij} = \langle D^i e_0, D^j e_0 \rangle, \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Lema 1 *Sea M una matriz HDP infinita, sea $D = (d_{ij})_{i,j}^{\infty}$ la matriz de Hessenberg correspondiente, entonces los polinomios mónicos verifican la siguiente fórmula de recurencia larga*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}_n(z) \;=\; & (z - d_{n,n})\widetilde{P}_{n-1}(z) + [d_{n,n-1}](-d_{n-1,n})\widetilde{P}_{n-2}(z) \\
& + [d_{n,n-1}d_{n-1,n-2}](-d_{n-2,n})\widetilde{P}_{n-3}(z) \\
& + [d_{n,n-1}d_{n-1,n-2}d_{n-2,n-3}](-d_{n-3,n})\widetilde{P}_{n-4}(z) \\
& + \cdots + [d_{n,n-1}d_{n-1,n-2}\cdots d_{21}](-d_{1,n})\widetilde{P}_0(z). \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Dem. A partir de la primera de las propiedades de la matriz D_n, definida por

$D_n = T_n^{-1} M'_n T_n^{-H}$, que nos dice que $\widetilde{P}_n(z) = |I_n z - D_n|$, es decir,

$$\widetilde{P}_n(z) = \begin{vmatrix} z-d_{11} & -d_{12} & -d_{13} & \cdots & -d_{1,n-2} & -d_{1,n-1} & -d_{1,n} \\ -d_{21} & z-d_{22} & -d_{23} & \cdots & -d_{2,n-2} & -d_{2,n-1} & -d_{2,n} \\ 0 & -d_{32} & z-d_{33} & \cdots & -d_{3,n-2} & -d_{3,n-1} & -d_{3,n} \\ 0 & 0 & -d_{43} & \cdots & -d_{4,n-2} & -d_{4,n-1} & -d_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -d_{n-1,n-2} & z-d_{n-1,n-1} & -d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -d_{n,n-1} & z-d_{n,n} \end{vmatrix},$$

desarrollando el determinante por la última fila reiteradamente, se obtiene la citada fórmula. □

Lema 2 *En las mismas condiciones del lema anterior, se verifica la siguiente fórmula de recurencia larga*

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_n(z) &= (z-d_{11})\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(z) + [d_{21}](-d_{12})\widetilde{P}^{(2)}_{n-2}(z) \\ &\quad + [d_{21}d_{32}](-d_{13})\widetilde{P}^{(3)}_{n-3}(z) \\ &\quad + [d_{21}d_{32}d_{43}](-d_{14})\widetilde{P}^{(4)}_{n-4}(z) \\ &\quad + \cdots + [d_{21}d_{32}\cdots d_{n,n-1}](-d_{1,n})\widetilde{P}^{(n)}_{0}(z). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dem. A partir de la igualdad $\widetilde{P}_n(z) = |I_n z - D_n|$, basta desarrollar por la primera columna reiteradamente. □

Supongamos que M es una matriz *HDP*, sea o no de momentos, y sea D la matriz de Hessenberg asociada a ella. Llamaremos $D^{(k)}$ a la matriz que resulta de eliminar en D las primeras k filas y columnas.

A partir de $D^{(k)}$ podemos, utilizando $c_{i,j} = \left\langle [D^{(k)}]^i e_0, [D^{(k)}]^j e_0 \right\rangle$, construir la matriz $M(k) = (c_{i,j}(k))_{i,j=0}^{\infty}$ (con esta notación $M = M(0)$). La matriz $M(k)$ es hermitiana definida positiva para cualquier $k \in \mathbb{Z}_+$, ya que los elementos de la subdiagonal son todos estrictamente positivos. En efecto, suponiendo $c_{00} = 1$, un sencillo cálculo a partir de la expresión de los términos de la subdiagonal de D, que valen $d_{j,j-1} = \sqrt{|M_j|\,|M_{j-2}|/|M_{j-1}|^2}$, nos permite determinar $|M_n| = \prod_{j=2}^{n} d_{j,j-1}^{2(n-j+1)}$. Por tanto $|M_n(k)| = \prod_{j=2}^{n} d_{j+k,j+k-1}^{2(n-j+1)}$, será también una matriz infinita, hermitiana definida positiva. En consecuencia $M(k)$ definirá un producto escalar, en general diferente, para cada valor de k.

Los *polinomios desplazados* mónicos de orden $k \in \mathbb{Z}_+$, fijado de antemano, y grado $n-k$, para $n \geq k$, se definen mediante

$$\widetilde{P}^{(k)}_{n-k}(z) = |I_{n-k}z - D^{(k)}_{n-k}|, \quad n > k, \text{ con } \widetilde{P}^{(k)}_0 = 1,$$

y son ortogonales respecto del producto escalar introducido por $M(k)$. El caso $k = 1$, da lugar a los *polinomios asociados* que cuando el soporte es real han sido muy bien estudiados, véase [3] o [6]. Para casos no reales y $k \geq 1$, veáse [1].

Consideraremos la siguiente normalización de los mónicos

$$\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z) = \frac{\widetilde{P}^{(k)}_{n-k}(z)}{d_{k+2,k+1}d_{k+3,k+2}\cdots d_{n+1,n}}, \quad n > k, \text{ con } \widehat{P}^{(k)}_0(z) = 1.$$

Para que esta normalización sea coherente con la norma usual de los mónicos, es decir cuando $k = 0$, supondremos a partir de ahora y en todo lo que sigue, que $c_{00} = 1$. De este modo, si recordamos que $\triangle_{n+1} = |M_n|$, como $|M_0| = 1$, haciendo $|M_1| = c_{00} = 1$, y como cabe esperar, se cumple que

$$||\widetilde{P}_n(z)|| = d_{21}d_{32}\cdots d_{n+1,n} = \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{|M_{j+1}||M_{j-1}|}{|M_j|^2}} = \sqrt{\triangle_n/\triangle_{n-1}}.$$

Lema 3 (Recurrencia larga para desplazados)
Sea M una matriz HDP infinita, sea $D = (d_{ij})^{\infty}_{i,j}$ la matriz de Hessenberg correspondiente, y sean $\{\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z)\}$ los polinomios desplazados mónicos, entonces se verifica la siguiente fórmula de recurrencia larga

$$\begin{aligned}\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z) \;=\; & (z - d_{j+1,j+1})\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-1}(z) + [d_{j+2,j+1}](-d_{j+1,j+2})\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(z) \\ & +[d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}](-d_{j+1,j+3})\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(z) \\ & +[d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}d_{j+4,j+3}](-d_{j+1,j+4})\widetilde{P}^{(j+4)}_{n-j-4}(z) \\ & +\cdots + [d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}d_{j+4,j+3}\cdots d_{n,n-1}](-d_{j+1,n})\widetilde{P}^{(n)}_0(z). \quad (1.3)\end{aligned}$$

Dem. Tenemos que

$$
\begin{array}{rcl}
\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z) &=& \left| I_{n-j}z - D^{(j)}_{n-j} \right| = \\
&=& \left| \begin{array}{cccccc}
z-d_{j+1,j+1} & -d_{j+1,j+2} & -d_{j+1,j+3} & \cdots & -d_{j+1,n-1} & -d_{j+1,n} \\
-d_{j+2,j+1} & z-d_{j+2,j+2} & -d_{j+2,j+3} & \cdots & -d_{j+2,n-1} & -d_{j+2,n} \\
0 & -d_{j+3,j+2} & z-d_{j+3,j+3} & \cdots & -d_{j+3,n-1} & -d_{j+3,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & z-d_{n-1,n-1} & -d_{n-1,n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -d_{n,n-1} & z-d_{n,n}
\end{array} \right| .
\end{array}
$$

Desarrollando por la primera columna reiteradamente se obtiene la fórmula. $\square$

Lema 4 *Sea M una matriz HDP infinita, sea $D = (d_{ij})^{\infty}_{i,j}$ la matriz de Hessenberg correspondiente, y sean $\{\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)\}$ los correspondientes polinomios desplazados normalizados, entonces verifican la siguiente fórmula de recurrencia larga*

$$
\begin{array}{rcl}
\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z) &=& \dfrac{(z-d_{j+1,j+1})}{d_{j+2,j+1}}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j+1}(z) - \dfrac{d_{j+1,j+2}}{d_{j+3,j+2}}\widehat{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(z) - \dfrac{d_{j+1,j+3}}{d_{j+4,j+3}}\widehat{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(z) \\
&& -\dfrac{d_{j+1,j+4}}{d_{j+5,j+4}}\widehat{P}^{(j+4)}_{n-j-4}(z) - \cdots - \dfrac{d_{j+1,n}}{d_{n+1,n}}\widehat{P}^{(n)}_{0}(z).
\end{array} \tag{1.4}
$$

Dem. Consideremos la normalización de estos polinomios desplazados

$$
\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z) = \frac{\widetilde{P}^{(k)}_{n-k}(z)}{d_{k+2,k+1}d_{k+3,k+2}\cdots d_{n+1,n}},
$$

se tiene entonces que

$$
\begin{array}{rcl}
\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z) &=& \dfrac{1}{d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}\cdots d_{n+1,n}}\left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z)\right] \\
&=& \dfrac{1}{d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}\cdots d_{n+1,n}}\left[(z-d_{j+1,j+1})\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-1}(z)\right] \\
&& +[d_{j+2,j+1}](-d_{j+1,j+2})\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(z) \\
&& +[d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}](-d_{j+1,j+3})\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(z) \\
&& +[d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}d_{j+4,j+3}](-d_{j+1,j+4})\widetilde{P}^{(j+4)}_{n-j-4}(z) \\
&& +\cdots+[d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}d_{j+4,j+3}\cdots d_{n,n-1}](-d_{j+1,n})\widetilde{P}^{(n)}_{0}(z),
\end{array}
$$

de donde resulta finalmente

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z) &= \frac{(z-d_{j+1,j+1})}{d_{j+2,j+1}}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j+1}(z) - \frac{d_{j+1,j+2}}{d_{j+3,j+2}}\widehat{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(z) - \frac{d_{j+1,j+3}}{d_{j+4,j+3}}\widehat{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(z) \\
&\quad -\frac{d_{j+1,j+4}}{d_{j+5,j+4}}\widehat{P}^{(j+4)}_{n-j-4}(z) - \cdots - \frac{d_{j+1,n}}{d_{n+1,n}}\widehat{P}^{(n)}_{0}(z).
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

No es necesario que el desplazamiento del polinomio y su grado sumen n. Si se considera el polinomio desplazado $j-1$, de grado $k-j$, y se desarrolla del mismo modo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}^{(j-1)}_{k-j}(z) &= (z-d_{j,j})\widetilde{P}^{(j)}_{k-j-1}(z) + [d_{j+1,j}](-d_{j,j+1})\widetilde{P}^{(j+1)}_{k-j-2}(z) \\
&\quad +[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}](-d_{j,j+2})\widetilde{P}^{(j+2)}_{k-j-3}(z) \\
&\quad +\cdots+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}\cdots d_{k-1,k-2}](-d_{j,k-1})\widetilde{P}^{(k-1)}_{0}(z), \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

y utilizando la normalización

$$\widetilde{P}^{(i)}_{k-i-1}(z) = d_{i+2,i+1}\cdots d_{k,k-1}\widehat{P}^{(i)}_{k-i-1}(z),$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^{(j-1)}_{k-j}(z) &= \frac{(z-d_{j,j})}{d_{j+1,j}}\widehat{P}^{(j)}_{k-j-1}(z) - \frac{d_{j,j+1}}{d_{j+2,j+1}}\widehat{P}^{(j+1)}_{k-j-2}(z) - \frac{d_{j,j+2}}{d_{j+3,j+2}}\widehat{P}^{(j+2)}_{k-j-3}(z) \\
&\quad -\cdots-\frac{d_{j,k-1}}{d_{k,k-1}}\widehat{P}^{(k-1)}_{0}(z). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Lema 5 (Recurrencia larga descendente)
Sea M una matriz HDP infinita, sea $D=(d_{ij})_{i,j}^{\infty}$ la matriz de Hessenberg correspondiente, entonces los polinomios desplazados mónicos verifican que

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z) &= (z-d_{n,n})\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(z) + [d_{n,n-1}](-d_{n-1,n})\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-2}(z) \\
&\quad +[d_{n,n-1}d_{n-1,n-2}](-d_{n-2,n})\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-3}(z) \\
&\quad +\cdots+[d_{n,n-1}d_{n-1,n-2}\cdots d_{j+2,j+1}](-d_{j+1,n})\widetilde{P}^{(j)}_{0}(z). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

DEM. Basta considerar la igualdad anterior

$$\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z) = \left| I_{n-j}z - D^{(j)}_{n-j} \right|,$$

y desarrollar por la última fila reiteradamente. $\square$

2. Secciones finitas de la resolvente

La matriz $(I_n z - D_n)^{-1}$ es una sección finita de orden n de la resolvente de la matriz D. El siguiente teorema nos proporciona los elementos de la parte triangular inferior y de la parte superior de esta matriz, donde los elementos están dados en función de los polinomios desplazados.

Teorema 1 (Expresión de elementos de la resolvente de secciones finitas) *Sea M una matriz HDP infinita, sea $D = (d_{ij})_{i,j}^{\infty}$ la matriz de Hessenberg correspondiente, y sean $\{\widehat{P}_n(z)\}$ los polinomios normalizados y $\{\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)\}$ los polinomios desplazados, entonces $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{z : P_n(z) = 0\}$ se cumple que*

$$(I_n z - D_n)^{-1}[j,k] = \begin{cases} \dfrac{1}{d_{j+1,j}} \dfrac{\widehat{P}_{k-1}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)}{\widehat{P}_n(z)}, & si \quad j \geq k. \\ \dfrac{1}{d_{j+1,j}} \left[\dfrac{\widehat{P}_{k-1}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)}{\widehat{P}_n(z)} - \widehat{P}^{(j)}_{k-j-1}(z) \right], & si \quad j < k. \end{cases} \tag{2.1}$$

DEM. Se sabe que $\widetilde{P}_n(z) = |I_n z - D_n|$. Para determinar el elemento $[j,k]$ bastará analizar cuál es el adjunto del elemento traspuesto del $(I_n z - D_n)^{-1}[j,k]$. Se tiene que

$$(I_n z - D_n)^{-1}[j,k] = \frac{\text{Adj }(k,j)}{|I_n z - D_n|}.$$

En el caso $j \geq k$, el elemento $[k,j]$ está en la matriz triangular superior, eliminando la fila k-ésima y la columna j-ésima resulta

$$\text{Adj }(k,j) = (-1)^{j+k} \begin{vmatrix} A & D & F \\ 0 & B & E \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = (-1)^{j+k}|A|\,|B|\,|C|,$$

donde A, B, C son matrices cuadradas. Tendremos

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} z-d_{11} & -d_{12} & -d_{13} & \cdots & -d_{1,k-1} \\ -d_{21} & z-d_{22} & -d_{23} & \cdots & -d_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -d_{k-2,k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-d_{k-1,k-1} \end{vmatrix} = \widetilde{P}_{k-1}(z) \\
|B| &= \begin{vmatrix} -d_{k+1,k} & z-d_{k+1,k+1} & -d_{k+1,k+2} & \cdots & -d_{k+1,j-1} \\ 0 & -d_{k+2,k+1} & z-d_{k+2,k+2} & \cdots & -d_{k+2,j-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-d_{j-1,j-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -d_{j,j-1} \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{j-k} d_{k+1,k} d_{k+2,k+1} \cdots d_{j,j-1} \\
|C| &= \begin{vmatrix} z-d_{j+1,j+1} & -d_{j+1,j+2} & -d_{j+1,j+3} & \cdots & -d_{j+1,n} \\ -d_{j+2,j+1} & z-d_{j+2,j+2} & -d_{j+2,j+3} & \cdots & -d_{j+2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-d_{n,n} \end{vmatrix} = \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z).
\end{aligned}
$$

Resultando finalmente

$$
(I_n z - D_n)^{-1}[j,k] = (-1)^{j-k} d_{k+1,k} d_{k+2,k+1} \cdots d_{j,j-1} \frac{\widetilde{P}_{k-1}(z) \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z)}{\widetilde{P}_n(z)} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= d_{k+1,k} d_{k+2,k+1} \cdots d_{j,j-1} \frac{d_{21} d_{32} \cdots d_{k,k-1} \widehat{P}_{k-1}(z) d_{j+2,j+1} d_{j+3,j+2} \cdots d_{n+1,n} \widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)}{d_{21} d_{32} \cdots d_{n+1,n} \widehat{P}_n(z)} \\
&= \frac{\widehat{P}_{k-1}(z) \widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)}{d_{j+1,j} \widehat{P}_n(z)},
\end{aligned}
$$

para $j \geq k$. La fórmula es enteramente válida si $j = k$.

Para el caso general bastará con comprobar que al multiplicar $I_n z - D_n$ por $(I_n z - D_n)^{-1}$ se obtiene I_n. Hagamos en primer lugar el producto de la fila j-ésima por la columna j-ésima, tenemos

$$(\cdots 0 \ \ -d_{j,j-1} \ \ z-d_{jj} \ \ -d_{j,j+1}\cdots d_{j,n})\begin{pmatrix} \frac{1}{d_{21}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(1)}_{n-1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(1)}_{j-2}\right] \\ \frac{1}{d_{32}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(2)}_{n-2}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(2)}_{j-3}\right] \\ \vdots \\ \frac{1}{d_{j,j-1}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j-1)}_{0}\right] \\ \frac{1}{d_{j+1,j}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j)}_{-1}\right] \\ \frac{1}{d_{j+2,j+1}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j+1)}_{-2}\right] \\ \vdots \\ \frac{1}{d_{n+1,n}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(n)}_{0}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(n)}_{j-n-1}\right] \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
= \ & -d_{j,j-1}\frac{1}{d_{j,j-1}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j-1)}_{0}\right]+(z-d_{j,j})\frac{1}{d_{j+1,j}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j)}_{-1}\right] \\
& -d_{j,j+1}\frac{1}{d_{j+2,j+1}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j+1)}_{-2}\right]-\cdots-d_{j,n}\frac{1}{d_{n+1,n}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(n)}_{0}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(n)}_{j-n-1}\right] \\
= \ & 1-\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}}{\widehat{P}_n}+\frac{(z-d_{j,j})\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}}{d_{j+1,j}\widehat{P}_n}-\frac{d_{j,j+1}\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}}{d_{j+2,j+1}\widehat{P}_n}-\cdots-\frac{d_{j,n}\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(n)}_{0}}{d_{n+1,n}\widehat{P}_n} \\
= \ & 1-\frac{\widehat{P}_{j-1}}{\widehat{P}_n}\left[\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}-\frac{(z-d_{j,j})}{d_{j+1,j}}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}+\frac{d_{j,j+1}}{d_{j+2,j+1}}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}+\cdots+\frac{d_{j,n}}{d_{n+1,n}}\widehat{P}^{(n)}_{0}\right]=1
\end{aligned}$$

ya que este corchete es nulo, pues por la fórmula (1.4) de recurrencia larga, es

$$\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}=\frac{(z-d_{j,j})}{d_{j+1,j}}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}-\frac{d_{j,j+1}}{d_{j+2,j+1}}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}-\cdots-\frac{d_{j,n}}{d_{n+1,n}}\widehat{P}^{(n)}_{0}.$$

Veamos ahora el producto de la fila j-ésima por la columna k-ésima:

$$
(\cdots 0 \;\; -d_{j,j-1} \;\; z-d_{jj} \;\; -d_{j,j+1} \cdots d_{j,n})
\begin{pmatrix}
\frac{1}{d_{21}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(1)}_{n-1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(1)}_{k-2}\right]\\
\frac{1}{d_{32}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(2)}_{n-2}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(2)}_{k-3}\right]\\
\vdots\\
\frac{1}{d_{j,j-1}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j-1)}_{k-j}\right]\\
\frac{1}{d_{j+1,j}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j)}_{k-j-1}\right]\\
\frac{1}{d_{j+2,j+1}}\left[\frac{\widehat{P}_{j-1}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j+1)}_{-2}\right]\\
\vdots\\
\frac{1}{d_{n+1,n}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(n)}_{0}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(n)}_{k-n-1}\right]
\end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{aligned}
= \;\; & -d_{j,j-1}\frac{1}{d_{j,j-1}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j-1)}_{k-j}\right]+(z-d_{j,j})\frac{1}{d_{j+1,j}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j)}_{k-j-1}\right]\\
& -d_{j,j+1}\frac{1}{d_{j+2,j+1}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(j+1)}_{k-j-2}\right]-\cdots-d_{j,n}\frac{1}{d_{n+1,n}}\left[\frac{\widehat{P}_{k-1}\widehat{P}^{(n)}_{0}}{\widehat{P}_n}-\widehat{P}^{(n)}_{k-n-1}\right]\\
= \;\; & -\frac{\widehat{P}_{k-1}}{\widehat{P}_n}\left[\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}-\frac{(z-d_{j,j})}{d_{j+1,j}}\widehat{P}^{(j)}_{n-j}+\frac{d_{j,j+1}}{d_{j+2,j+1}}\widehat{P}^{(j+1)}_{n-j-1}+\cdots+\frac{d_{j,n}}{d_{n+1,n}}\widehat{P}^{(n)}_{0}\right]\\
& +\left[\widehat{P}^{(j-1)}_{k-j}-\frac{(z-d_{j,j})}{d_{j+1,j}}\widehat{P}^{(j)}_{k-j-1}+\frac{d_{j,j+1}}{d_{j+2,j+1}}\widehat{P}^{(j+1)}_{k-j-2}+\cdots+\frac{d_{j,n}}{d_{n+1,n}}\widehat{P}^{(n)}_{k-n-1}\right].
\end{aligned}
$$

En esta última expresión el primer corchete es nulo por la fórmula (1.4) de recurrencia larga. El segundo corchete también es nulo, ya que si $k<j$, todos los polinomios son nulos por tener subíndice negativo, y si es $k\geq j$, basta tener en cuenta la fórmula (1.6) de recurrencia larga para el polinomio $\widehat{P}^{(j-1)}_{k-j}(z)$ y que a partir del sumando $\frac{d_{j,k-1}}{d_{k,k-1}}\widehat{P}^{(k-1)}_{0}(z)$ todos son nulos por idéntica razón. $\square$

3. Suma de productos combinados

En el interesante artículo [11], utilizando wronskianos, Van Assche demuestra dos fórmulas análogas a (3.1) y (3.2), semejantes a la de Christoffel-Darboux. En el caso hermitiano la demostración es algo más compleja y está en el siguiente teorema.

Teorema 2 (Suma de productos combinados)
Sea M una matriz HDP infinita, $D = (d_{ij})_{i,j}^{\infty}$ la matriz de Hessenberg asociada, $\{\widetilde{P}_n(z)\}$ la correspondiente sucesión de polinomios mónicos y $\{\widetilde{P}^{(k)}_{n-k}(z)\}$ los polinomios desplazados de orden k, entonces se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}_{k-1}(x)\widetilde{P}^{(k)}_{n-k}(y) = \frac{\widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_n(y)}{x-y} \tag{3.1}$$

si $x \neq y$, y su forma derivada

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}_{k-1}(x)\widetilde{P}^{(k)}_{n-k}(x) = \widetilde{P}'_n(x). \tag{3.2}$$

Dem. Apliquemos inducción completa sobre n. Como es

$$\widetilde{P}_1(x) - \widetilde{P}_1(y) = (x - d_{11}) - (y - d_{11}) = x - y,$$

queda

$$\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}^{(1)}_0(y) = \frac{\widetilde{P}_1(x) - \widetilde{P}_1(y)}{x-y},$$

por lo que la fórmula (3.1) es válida para $n = 1$.

Supongamos ahora que la igualdad es válida para los valores desde 1 hasta $n-1$, y comencemos por escribir también la igualdad trivial

$$0 = \frac{\widetilde{P}_0(x) - \widetilde{P}_0(y)}{x-y}.$$

Por la hipótesis de inducción tendremos las igualdades

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\widetilde{P}_0(x)-\widetilde{P}_0(y)}{x-y}\\
\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}_0^{(1)}(y) &= \frac{\widetilde{P}_1(x)-\widetilde{P}_1(y)}{x-y}\\
\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}_1^{(1)}(y)+\widetilde{P}_1(x)\widetilde{P}_0^{(2)}(y) &= \frac{\widetilde{P}_2(x)-\widetilde{P}_2(y)}{x-y}\\
\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}_2^{(1)}(y)+\widetilde{P}_1(x)\widetilde{P}_1^{(2)}(y)+\widetilde{P}_2(x)\widetilde{P}_0^{(3)}(y) &= \frac{\widetilde{P}_3(x)-\widetilde{P}_3(y)}{x-y}\\
&\vdots\\
\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}_{n-3}^{(1)}(y)+\widetilde{P}_1(x)\widetilde{P}_{n-4}^{(2)}(y)+...+\widetilde{P}_{n-3}(x)\widetilde{P}_0^{(n-2)}(y) &= \frac{\widetilde{P}_{n-2}(x)-\widetilde{P}_{n-2}(y)}{x-y}\\
\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}_{n-2}^{(1)}(y)+\widetilde{P}_1(x)\widetilde{P}_{n-3}^{(2)}(y)+...+\widetilde{P}_{n-2}(x)\widetilde{P}_0^{(n-1)}(y) &= \frac{\widetilde{P}_{n-1}(x)-\widetilde{P}_{n-1}(y)}{x-y}
\end{aligned}$$

y las multiplicamos, respectivamente, por

$$\begin{array}{c}
[d_{n,n-1}...d_{21}]\,(-d_{1,n})\\
[d_{n,n-1}...d_{32}]\,(-d_{2,n})\\
[d_{n,n-1}...d_{43}]\,(-d_{3,n})\\
[d_{n,n-1}...d_{54}]\,(-d_{4,n})\\
\vdots\\
[d_{n,n-1}]\,(-d_{n-1,n})\\
(y-d_{n,n})\,,
\end{array}$$

sumando, sacando factor común los primeros polinomios de cada producto y teniendo en cuenta la fórmula (1.7) con $j=1,2,...,n-1$ para la parte izquierda y la fórmula (1.1) para la parte derecha, resulta entonces que:

$$\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}_{n-1}^{(1)}(y)+\widetilde{P}_1(x)\widetilde{P}_{n-2}^{(2)}(y)+...+\widetilde{P}_{n-2}(x)\widetilde{P}_1^{(n-1)}(y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x-y}[[d_{n,n-1}...d_{21}]\,(-d_{1,n})\,\widetilde{P}_0(x) + [d_{n,n-1}...d_{32}]\,(-d_{2,n})\,\widetilde{P}_1(x) \\
&\quad + [d_{n,n-1}...d_{43}]\,(-d_{3,n})\,\widetilde{P}_2(x) + [d_{n,n-1}...d_{54}]\,(-d_{4,n})\,\widetilde{P}_3(x) \\
&\quad +... + [d_{n,n-1}]\,(-d_{n-1,n})\,\widetilde{P}_{n-2}(x) + (y-d_{n,n})\widetilde{P}_{n-1}(x)] \\
&\quad -\frac{1}{x-y}[[d_{n,n-1}...d_{21}]\,(-d_{1,n})\,\widetilde{P}_0(y) + [d_{n,n-1}...d_{32}]\,(-d_{2,n})\,\widetilde{P}_1(y) \\
&\quad + [d_{n,n-1}...d_{43}]\,(-d_{3,n})\,\widetilde{P}_2(y) + [d_{n,n-1}...d_{54}]\,(-d_{4,n})\,\widetilde{P}_3(y) \\
&\quad +... + [d_{n,n-1}]\,(-d_{n-1,n})\,\widetilde{P}_{n-2}(y) + (y-d_{n,n})\widetilde{P}_{n-1}(y)] \\
&= \frac{1}{x-y}\left[\widetilde{P}_n(x) - (x-d_{n,n})\widetilde{P}_{n-1}(x) + (y-d_{n,n})\widetilde{P}_{n-1}(x)\right] - \frac{1}{x-y}\widetilde{P}_n(y) \\
&= \frac{\widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_n(y)}{x-y} + \frac{(y-x)\widetilde{P}_{n-1}(x)}{x-y},
\end{aligned}$$

de donde, simplificando y pasando al primer miembro este último sumando, que es

$$\widetilde{P}_{n-1}(x) = \widetilde{P}_{n-1}(x)\widetilde{P}_0^{(n)}(y),$$

resulta

$$\widetilde{P}_0(x)\widetilde{P}_{n-1}^{(1)}(y) + \widetilde{P}_1(x)\widetilde{P}_{n-2}^{(2)}(y) + ... + \widetilde{P}_{n-1}(x)\widetilde{P}_0^{(n)}(y) = \frac{\widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_n(y)}{x-y},$$

es decir, la primera de las fórmulas buscadas. Luego se cumple en el caso n, y la expresión es por tanto cierta.

Finalmente, si hacemos tender y hacia x en (3.1), obtenemos la fórmula (3.2), lo que concluye la demostración. □

Corolario *Con las hipótesis del teorema, son válidas las fórmulas siguientes para polinomios normalizados:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_{k+1,k}} \widehat{P}_{k-1}(x)\widehat{P}_{n-k}^{(k)}(y) = \frac{\widehat{P}_n(x) - \widehat{P}_n(y)}{x-y}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_{k+1,k}} \widehat{P}_{k-1}(x)\widehat{P}_{n-k}^{(k)}(x) = \widehat{P}'_n(x), \tag{3.4}$$

$$\text{traza}\ ((I_n z - D_n)^{-1}) = \frac{\widehat{P}'_n(z)}{\widehat{P}_n(z)}. \tag{3.5}$$

Dem. Utilizando la normalización

$$\widetilde{P}_n(z) = [d_{n+1,n}...d_{21}]\,\widehat{P}_n(z) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{P}^{(k)}_{n-k}(z) = [d_{k+2,k+1}...d_{n+1,n}]\,\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z),$$

las fórmulas (3.1) y (3.2) se convierten en (3.3) y (3.4). Para demostrar la fórmula de la traza, dada por (3.5), utilizamos los valores de la diagonal de $(I_n z - D_n)^{-1}$, calculados en el Teorema 1 y dados por (2.1), obteniendo

$$\begin{aligned}
\text{traza}\left((I_n z - D_n)^{-1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} (I_n z - D_n)^{-1}[k,k] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\widehat{P}_{k-1}(z)\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z)}{d_{k+1,k}\widehat{P}_n(z)} \\
&= \frac{1}{\widehat{P}_n(z)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\widehat{P}_{k-1}(z)\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z)}{d_{k+1,k}} = \frac{\widehat{P}'_n(z)}{\widehat{P}_n(z)},
\end{aligned}$$

habiendo utilizado (3.4) en el último paso. Esta fórmula de la traza es una extensión de la fórmula que se encuentra en la página 241 de [11] y es relativa a la tridiagonal de Jacobi. □

4. Algunos ejemplos

Vamos a ilustrar el funcionamiento práctico de algunos de los resultados probados, para ello elegiremos unos PO sencillos. Establezcamos algunos resultados introductorios. Dada la sucesión

$$\ldots, (-1/3)^2, -1/3, 1, -1/3, (-1/3)^2, \ldots$$

es decir $c_n = (-1/3)^{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$, construimos con ella la matriz de Toeplitz infinita

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 & 1/81 & \ldots \\ -1/3 & 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27 & \ldots \\ 1/9 & -1/3 & 1 & -1/3 & 1/9 & \ldots \\ -1/27 & 1/9 & -1/3 & 1 & -1/3 & \ldots \\ /81 & -1/27 & 1/9 & -1/3 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Obviamente es simétrica y es fácil probar por inducción que es HDP, ya que se cumple que $|T_{n+1}| = 2^{3n}/3^{2n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Se tiene por tanto que $1/\kappa^2 = \lim_{n\to\infty} |T_{n+1}|/|T_n| = 8/9 > 0$, luego se trata de un caso que satisface la condición de Szegö.

Averiguemos su símbolo. Se tiene que

$$a(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^{|n|} z^n = \frac{8z}{(z+3)(3z+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(t) = \frac{8e^{i\theta}}{(e^{i\theta}+3)(3e^{i\theta}+1)} = \frac{4}{5+3\cos(\theta)}.$$

Se comprueba fácilmente que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{4}{5+3\cos(\theta)} d\theta = 1.$$

La sucesión de PO, que se calcula, como sabemos a partir de

$$\widehat{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{|T_n|\ |T_{n+1}|}} \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-(n-1)} & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-(n-2)} & c_{-(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 & c_{-1} \\ 1 & z & \ldots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix},$$

con

$$|T_{n+1}| = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-(n-1)} & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{-(n-2)} & c_{-(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 & c_{-1} \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_1 & c_0 \end{vmatrix},$$

en este caso, tras cálculos elementales, queda

$$\widehat{P}_0(z) = 1, \quad \widehat{P}_1(z) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z + \frac{1}{3}\right), \quad \widehat{P}_2(z) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^2 + \frac{1}{3}z\right),$$

$$\widehat{P}_3(z) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^3 + \frac{1}{3}z^2\right), \quad \widehat{P}_4(z) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4 + \frac{1}{3}z^3\right), \quad \ldots$$

En general tendremos que la sucesión de polinomios normalizados es

$$\widehat{P}_n(z) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^n + \frac{1}{3}z^{n-1}\right), \quad n \geq 1. \tag{4.1}$$

Resulta inmediato comprobar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{P}_j(e^{i\theta})\overline{\widehat{P}_k(e^{i\theta})}\frac{4}{5+3\cos(\theta)}d\theta = \delta_{jk}.$$

Por otro lado la matriz de Hessenberg asociada, véase [7], se calcula a partir de la descomposición de Cholesky de $T_n = C_n C_n^H$. Llamamos T_n' a la matriz infinita de orden $n \times n$ que resulta de eliminar en T su primera columna, se tiene que $D_n = C_n^{-1} T_n' C_n^{-H}$, y queda

$$D = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2/3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Puede probarse que D define un operador cuasinormal en ℓ^2, ya que si M es de Toeplitz y definida positiva, entonces D siempre es cuasinormal, aunque no evidentemente con una forma tan simple como en este caso, es decir se cumple $D(D^H D) = (D^H D)D$.

En lo que sigue ilustraremos las identidades (3.5) y (3.1). Calculemos la matriz $(I_n z - D_n)^{-1}$, obviamente es

$$Iz - D = \begin{pmatrix} z+1/3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -2/3\sqrt{2} & z & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & z & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & z & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

y resulta

$$(Iz - D)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{3z+1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{z(3z+1)} & \dfrac{1}{z} & 0 & 0 & \dots \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{z^2(3z+1)} & \dfrac{1}{z^2} & \dfrac{1}{z} & 0 & \dots \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{z^3(3z+1)} & \dfrac{1}{z^3} & \dfrac{1}{z^2} & \dfrac{1}{z} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Una vez establecida esta introducción pasemos a poner los ejemplos que nos interesan.

Ejemplo 1

Ilustremos la primera fórmula del Teorema 1, es decir el resultado que permite calcular los elementos de la resolvente cuando $j \geq k$, en función de los PO y los desplazados.

Hemos visto que para este producto escalar tenemos una resolvente (4.2) que es triangular inferior y no necesitamos la fórmula completa.

Veamos que se cumple

$$(I_n z - D_n)^{-1}[j,k] = \frac{1}{d_{j+1,j}} \frac{\widehat{P}_{k-1}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)}{\widehat{P}_n(z)}.$$

En efecto, elijamos $n = 4$, tenemos que los normalizados desplazados que aparecen en la anterior expresión son:

$$\widehat{P}^{(1)}_{4-1}(z) = z^3, \quad \widehat{P}^{(2)}_{4-2}(z) = z^2, \quad \widehat{P}^{(3)}_{4-3}(z) = z, \quad \widehat{P}^{(4)}_{4-4}(z) = 1.$$

$$
\begin{array}{lclll}
[1,1] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{1-1}(z)\widehat{P}^{(1)}_{4-1}(z)}{d_{21}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{1\cdot z^3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{1}{z+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{3z+1} \\
[2,1] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{1-1}(z)\widehat{P}^{(2)}_{4-2}(z)}{d_{32}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{1\cdot z^2}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3z^2+z} \\
[2,2] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{2-1}(z)\widehat{P}^{(2)}_{4-2}(z)}{d_{32}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot z^2}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{3z+1}{3z^2+z} = \dfrac{1}{z} \\
[3,1] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{1-1}(z)\widehat{P}^{(3)}_{4-3}(z)}{d_{43}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{1\cdot z}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3z^3+z^2} \\
[3,2] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{2-1}(z)\widehat{P}^{(3)}_{4-3}(z)}{d_{43}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot z}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{z+\frac{1}{3}}{z^3+\frac{1}{3}z^2} = \dfrac{1}{z^2} \\
[3,3] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{3-1}(z)\widehat{P}^{(3)}_{4-3}(z)}{d_{43}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^2+\frac{1}{3}z\right)\cdot z}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{z^3+\frac{1}{3}z^2}{z^4+\frac{1}{3}z^3} = \dfrac{1}{z} \\
[4,1] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{1-1}(z)\widehat{P}^{(4)}_{4-4}(z)}{d_{54}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{1\cdot 1}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3z^4+z^3} \\
[4,2] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{2-1}(z)\widehat{P}^{(4)}_{4-4}(z)}{d_{54}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot 1}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{3z+1}{3z^4+z^3} = \dfrac{1}{z^3} \\
[4,3] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{3-1}(z)\widehat{P}^{(4)}_{4-4}(z)}{d_{54}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^2+\frac{1}{3}z\right)\cdot 1}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{3z^2+z}{3z^4+z^3} = \dfrac{1}{z^2} \\
[4,4] \rightarrow & \dfrac{\widehat{P}_{4-1}(z)\widehat{P}^{(4)}_{4-4}(z)}{d_{54}\widehat{P}_4(z)} & = & \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^3+\frac{1}{3}z^2\right)\cdot 1}{1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^4+\frac{1}{3}z^3\right)} = \dfrac{3z^3+z^2}{3z^4+z^3} = \dfrac{1}{z}
\end{array}
$$

Vemos que los $[j,k]$ anteriores coinciden con los elementos de la matriz inversa de $(I_4 z - D_4)$ calculada directamente, y que hemos obtenido en (4.2).

Ejemplo 2 Comprobemos que se verifica

$$
\text{traza}\left((I_n z - D_n)^{-1}\right) = \frac{\widehat{P}'_n(z)}{\widehat{P}_n(z)}. \tag{4.3}
$$

Inspeccionamos la resolvente, véase (4.2). Sumando la diagonal principal vemos que el término de la izquierda en (4.3) para una matriz $n \times n$ vale

$$\text{traza}\,((I_n z - D_n)^{-1}) = \frac{3}{3z+1} + \frac{n-1}{z} = \frac{n(3z+1)-1}{3\,z^2+z}, \quad n \geq 1.$$

Por otro lado calculamos el valor de la derecha en (4.3), se tiene que

$$\widehat{P}_n'(z) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(nz^{n-1} + \frac{n-1}{3}z^{n-2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\widehat{P}_n'(z)}{\widehat{P}_n(z)} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(nz^{n-1} + \frac{n-1}{3}z^{n-2}\right)}{\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(z^n + \frac{1}{3}z^{n-1}\right)} = \frac{n(3z+1)-1}{3\,z^2+z},$$

y se da la igualdad.

Ejemplo 3 Ilustremos también con un ejemplo *la suma de productos combinados* es decir

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}_{k-1}(x)\widetilde{P}_{n-k}^{(k)}(y) = \frac{\widetilde{P}_n(x) - \widetilde{P}_n(y)}{x-y}\cdot \tag{4.4}$$

Consideremos un n concreto, escojamos por ejemplo $n = 4$. Calculemos en primer lugar $\sum_{k=1}^{4} \widetilde{P}_{k-1}(x)\widetilde{P}_{4-k}^{(k)}(y)$. Los diferentes polinomios mónicos que aparecen en la fórmula son

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_{1-1}(x) &= 1 & \qquad \widetilde{P}_{4-1}^{(1)}(y) &= y^3\\
\widetilde{P}_{2-1}(x) &= x + \frac{1}{3} & \widetilde{P}_{4-2}^{(2)}(y) &= y^2\\
\widetilde{P}_{3-1}(x) &= x^2 + \frac{1}{3}x & \widetilde{P}_{4-3}^{(3)}(y) &= y\\
\widetilde{P}_{4-1}(x) &= x^3 + \frac{1}{3}x^2 & \widetilde{P}_{4-4}^{(4)}(y) &= 1.
\end{aligned}$$

Se cumple por tanto

$$\sum_{k=1}^{4} \widetilde{P}_{k-1}(x)\widetilde{P}_{4-k}^{(k)}(y) = y^3 + \frac{1}{3}\,y^2 + y^2x + \frac{1}{3}\,yx + yx^2 + \frac{1}{3}\,x^2 + x^3. \tag{4.5}$$

Por otro lado calculamos directamente el cociente de la derecha de (4.4), se tiene

$$\frac{\widetilde{P}_4(x)-\widetilde{P}_4(y)}{x-y}=\frac{(x^4+\frac{1}{3}x^3)-(y^4+\frac{1}{3}y^3)}{x-y}=\frac{x^4-y^4}{x-y}+\frac{1}{3}\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right)=$$
$$=x^3+x^2y+xy^2+y^3+\frac{1}{3}\left(x^2+xy+xy^2\right)=$$
$$=y^3+\frac{1}{3}\,y^2+y^2x+\frac{1}{3}\,yx+yx^2+\frac{1}{3}\,x^2+x^3,$$

luego efectivamente se cumple la identidad.

Ejemplo 4 Si hacemos que $y\to x$, resulta que para $n=4$, la fórmula derivada es

$$\sum_{k=1}^{4}\widetilde{P}_{k-1}(x)\widetilde{P}_{4-k}^{(k)}(x)=\widetilde{P}_4'(x).$$

Haciendo $y=x$ en (4.5) se convierte en $4x^3+x^2$, y es claro que

$$\widetilde{P}_4'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^4+\frac{1}{3}x^3\right)=4x^3+x^2,$$

luego se da la igualdad.

5. Aplicaciones

5.1. Propiedades de extracción y expresión integral de los polinomios asociados

Una sencilla propiedad nos permite extraer polinomios en un integral, cambiando la variable.

Proposición 1 *Sea μ una medida de Borel finita y positiva con soporte compacto $\Omega=\operatorname{supp}(\mu)$ y sea $\{\widehat{P}_n(z)\}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales normalizados, si es $j\le k$ y $z\notin\Omega$, se tiene que*

$$\int_\Omega\frac{\widehat{P}_j(w)\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w}d\mu(w)=\widehat{P}_j(z)\int_\Omega\frac{\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w}d\mu(w). \tag{5.1}$$

Dem. Es inmediato que

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_j(z)\int_\Omega \frac{\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w}d\mu(w) &= \int_\Omega \frac{\widehat{P}_j(z)\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w}d\mu(w) \\
&= \int_\Omega \frac{\widehat{P}_j(z)-\widehat{P}_j(w)}{z-w}\overline{\widehat{P}_k(w)}d\mu(w) + \int_\Omega \frac{\widehat{P}_j(w)\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w}d\mu(w) \\
&= \int_\Omega \frac{\widehat{P}_j(w)\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w}d\mu(w),
\end{aligned}$$

ya que $\dfrac{\widehat{P}_j(z)-\widehat{P}_j(w)}{z-w}$ es un polinomio en w, de grado $j-1$. □

Proposición 2 *Sea μ una medida de probabilidad con soporte compacto $\Omega = \operatorname{supp}(\mu)$, sea $\{\widehat{P}_n(z)\}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales normalizados y sean $\{\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z)\}$ los polinomios asociados, si es $1 \le k \le n$ y $z \notin \Omega$, se verifica que*

$$\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z) = \frac{d_{k+1,k}}{c_{00}}\int_\Omega \frac{\widehat{P}_n(z)-\widehat{P}_n(w)}{z-w}\overline{\widehat{P}_{k-1}(w)}d\mu(w). \tag{5.2}$$

Dem. A partir de la fórmula de la *suma de productos combinados* (3.3), escrita para z y w, tenemos

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d_{j+1,j}}\widehat{P}_{j-1}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(w) = \frac{\widehat{P}_n(z)-\widehat{P}_n(w)}{z-w}$$

multiplicando por $\overline{\widehat{P}_{k-1}(z)}$ e integrando con respecto a la medida $\mu(z)$, queda

$$\int_\Omega \overline{\widehat{P}_{k-1}(z)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d_{j+1,j}}\widehat{P}_{j-1}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(w)d\mu(z) = \int_\Omega \frac{\widehat{P}_n(z)-\widehat{P}_n(w)}{z-w}\overline{\widehat{P}_{k-1}(z)}d\mu(z).$$

Haciendo operaciones con el primer miembro

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d_{j+1,j}}\overline{\widehat{P}_{k-1}(z)}\widehat{P}_{j-1}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(w)\right)d\mu(z) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{j+1,j}} \left(\int_{\Omega} \widehat{P}_{j-1}(z)\overline{\widehat{P}_{k-1}(z)} d\mu(z) \right) \widehat{P}^{(j)}_{n-j}(w) = \frac{c_{00}}{d_{k+1,k}} \widehat{P}^{(k)}_{n-k}(w)$$

ya que todos los términos del sumatorio son nulos, por la ortogonalidad, salvo aquél en que es $j-1 = k-1$, en cuyo caso el paréntesis es igual a c_{00}, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(w)}{d_{k+1,k}} &= \int_{\Omega} \frac{\widehat{P}_n(z) - \widehat{P}_n(w)}{z-w} \overline{\widehat{P}_{k-1}(z)} d\mu(z) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\widehat{P}_n(w) - \widehat{P}_n(z)}{w-z} \overline{\widehat{P}_{k-1}(z)} d\mu(z). \end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de z y w, se obtiene finalmente

$$\frac{\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(w)}{d_{k+1,k}} = \int_{\Omega} \frac{\widehat{P}_n(z) - \widehat{P}_n(w)}{z-w} \overline{\widehat{P}_{k-1}(w)} d\mu(w),$$

como queríamos probar. $\square$

La importancia de esta proposición, aparte de su generalidad, es que nos permite obtener una *expresión integral de los polinomios desplazados* y una fórmula de extracción general que obtenemos en la Proposición 3 más general que (5.1) que es válida solo si $k \leq n$. Además, en el caso $k = 1$ se obtiene, pasando a mónicos, la conocida fórmula del caso real, con $c_{00} = S_0 = 1$, siempre que $z \notin \Omega$, se cumple

$$\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(z) = \frac{1}{c_{00}} \int_{\Omega} \frac{\widetilde{P}_n(z) - \widetilde{P}_n(w)}{z-w} d\mu(w). \tag{5.3}$$

Operando en (5.2) después de sustituir n y $k-1$, respectivamente por j y k, obtenemos la siguiente Proposición, que para una medida de probabilidad con $c_{00} = 1$, toma la forma:

Proposición 3 *Sea μ una medida de probabilidad con soporte compacto Ω, sea $\{\widehat{P}_n(z)\}$ la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales normalizados y sean $\{\widehat{P}^{(k)}_{n-k}(z)\}$ los polinomios desplazados, si $z \notin \Omega$, se verifica la siguiente fórmula de extracción general, válida $\forall j, k \in \mathbb{N}$, con $j > k$:*

$$\int_{\Omega} \frac{\widehat{P}_j(w)\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w} d\mu(w) = \widehat{P}_j(z) \int_{\Omega} \frac{\overline{\widehat{P}_k(w)}}{z-w} d\mu(w) - \frac{c_{00}}{d_{k+2,k+1}} \widehat{P}^{(k+1)}_{j-k-1}(z). \tag{5.4}$$

5.2. Fórmula de Christoffel-Darboux generalizada

En el caso real los n-núcleos se definen por la fórmula

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\widehat{P}_k(y)$$

y la fórmula de Christoffel-Darboux, escrita para polinomios mónicos, nos dice que, si $x \neq y$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}_k(x)\widetilde{P}_k(y) = \frac{\widetilde{P}_{n+1}(x)\widetilde{P}_n(y) - \widetilde{P}_{n+1}(x)\widetilde{P}_n(y)}{x-y}.$$

En el caso hermitiano no existe una fórmula semejante. Los n-núcleos se definen por

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k(x)\overline{\widehat{P}_k(y)},$$

para que se cumpla que $K_n(x,y) = \overline{K_n(y,x)}$. La correspondiente fórmula, dada por la Proposición 4, es mucho más compleja, como ocurre con la mayoría de las fórmulas en el caso hermitiano.

Proposición 4 *Sea una matriz HDP infinita, sea $D = (d_{ij})_{i,j}^{\infty}$ la matriz de Hessenberg correspondiente, entonces se tiene que*

$$\widetilde{P}_{n-j}^{(j-1)}(x)\widetilde{P}_{n-j}^{(j)}(y) - \widetilde{P}_{n-j+1}^{(j-1)}(y)\widetilde{P}_{n-j-1}^{(j)}(x) = \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} = \; & (x-y)\widetilde{P}_{n-j-1}^{(j)}(x)\widetilde{P}_{n-j}^{(j)}(y) \\ & + \sum_{r=1}^{n-j}(d_{j,j+r})[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{j+r,j+r-1}]\left[\widetilde{P}_{n-j-1}^{(j)}(y)\widetilde{P}_{n-j-r}^{(j+r)}(x) - \widetilde{P}_{n-j}^{(j)}(x)\widetilde{P}_{n-j-r-1}^{(j+r)}(y)\right]. \end{aligned}$$

Dem. Escribamos la fórmula de recurrencia larga (1.2) para n en x y para $n+1$ en y, tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{P}_{n-j}^{(j-1)}(x) \;=\; & (x-d_{jj})\widetilde{P}_{n-j-1}^{(j)}(x) + [d_{j+1,j}]\,(-d_{j,j+1})\widetilde{P}_{n-j-2}^{(j+1)}(x) \\ & + [d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}]\,(-d_{j,j+2})\widetilde{P}_{n-j-3}^{(j+2)}(x) \\ & + [d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}]\,(-d_{j,j+3})\widetilde{P}_{n-j-4}^{(j+3)}(x) \\ & + ... + [d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}]\,(-d_{j,n-1})\widetilde{P}_0^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(y) \;=\;& (y-d_{jj})\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)+[d_{j+1,j}]\,(-d_{j,j+1})\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-1}(y)\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}]\,(-d_{j,j+2})\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(y)\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}]\,(-d_{j,j+3})\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(y)\\
&+...+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}]\,(-d_{j,n-1})\widetilde{P}^{(n-1)}_{1}(y)\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}d_{n,n-1}]\,(-d_{j,n})\widetilde{P}^{(n)}_{0}(y)
\end{aligned}$$

Es claro que la última igualdad tiene un sumando más que la anterior. Multiplicando la primera de ellas por $\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)$, la segunda por $\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)$ y restando, queda

$$\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)-\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(y)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)=$$

$$\begin{aligned}
=\;& \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)[(x-d_{jj})\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)+[d_{j+1,j}]\,(-d_{j,j+1})\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-2}(x)\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}]\,(-d_{j,j+2})\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-3}(x)+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}]\,(-d_{j,j+3})\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-4}(x)\\
&+...+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}]\,(-d_{j,n-1})\widetilde{P}^{(n-1)}_{0}(x)]\\
&-\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)[(y-d_{jj})\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)+[d_{j+1,j}]\,(-d_{j,j+1})\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-1}(y)\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}]\,(-d_{j,j+2})\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(y)+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}]\,(-d_{j,j+3})\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(y)\\
&+...+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}]\,(-d_{j,n-1})\widetilde{P}^{(n-1)}_{1}(y)\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}d_{n,n-1}]\,(-d_{j,n})\widetilde{P}^{(n)}_{0}(y)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\;& (x-y)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\\
&+[d_{j+1,j}]\,(-d_{j,j+1})\left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-2}(x)-\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-1}(y)\right]\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}]\,(-d_{j,j+2})\left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-3}(x)-\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(y)\right]\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}]\,(-d_{j,j+3})\left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-4}(x)-\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(y)\right]\\
&+...+\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}]\,(-d_{j,n-1})\left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(n-1)}_{0}(x)-\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(n-1)}_{1}(y)\right]\\
&+[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}...d_{n-1,n-2}d_{n,n-1}]\,(-d_{j,n})\left[0-\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(n)}_{0}(y)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& (x-y)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y) \\
& + [d_{j+1,j}]\,(d_{j,j+1}) \left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-1}(y) - \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+1)}_{n-j-2}(x)\right] \\
& + [d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}]\,(d_{j,j+2}) \left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-2}(y) - \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+2)}_{n-j-3}(x)\right] \\
& + [d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}d_{j+3,j+2}]\,(d_{j,j+3}) \left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-3}(y) - \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+3)}_{n-j-4}(x)\right] \\
& +\ldots+ \\
& + [d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}\ldots d_{n-1,n-2}]\,(d_{j,n-1}) \left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(n-1)}_{1}(y) - \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(n-1)}_{0}(x)\right] \\
& + [d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}\ldots d_{n-1,n-2}d_{n,n-1}]\,(d_{j,n}) \left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(n)}_{0}(y) - 0\right] \\
= \;& (x-y)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y) \\
& + \sum_{r=1}^{n-j}(d_{j,j+r})\,[d_{j+1,j}\ldots d_{j+r,j+r-1}] \left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+r)}_{n-j-r}(y) - \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+r)}_{n-j-r-1}(x)\right],
\end{aligned}
$$

lo que prueba la proposición. Esta fórmula generaliza la Proposición 2.10 de [2] que es una mezcla de Christoffel-Darboux. □

A partir de esta fórmula general, haciendo $x = y = z$, resulta la fórmula siguiente que es otra generalización del Corolario 2.11 de [2]:

$$
\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z) - \widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(z) = \tag{5.6}
$$

$$
= \sum_{r=1}^{n-j}(d_{j,j+r})\,[d_{j+1,j}d_{j+2,j+1}\ldots d_{j+r,j+r-1}] \left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(z)\widetilde{P}^{(j+r)}_{n-j-r}(z) - \widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z)\widetilde{P}^{(j+r)}_{n-j-r-1}(z)\right],
$$

que nos permite calcular una cierta diferencia de productos de polinomios asociados consecutivos, semejante a la del primero de sus corchetes, que es del mismo tipo.

Por otra parte, haciendo $j = 1$ en la fórmula general (5.5), resulta:

$$
\widetilde{P}_{n-1}(x)\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(y) - \widetilde{P}_{n}(x)\widetilde{P}^{(1)}_{n-2}(y) = \tag{5.7}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& (x-y)\widetilde{P}^{(1)}_{n-2}(x)\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(y) \\
& + \sum_{r=1}^{n-1}(d_{1,r+1})\,[d_{21}d_{32}\ldots d_{r+1,r}] \left[\widetilde{P}^{(1)}_{n-2}(y)\widetilde{P}^{(r+1)}_{n-r-1}(x) - \widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(x)\widetilde{P}^{(r+1)}_{n-r-2}(y)\right]
\end{aligned}
$$

Esta es otra generalización del Corolario 2.8 de [2], que es una relación bien conocida.

Proposición 5 *En las mismas condiciones, para polinomios normalizados se tiene que*

$$\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j}(x)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(y) - \widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(y)\widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(x) = \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &= (x-y)\frac{\widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(y)}{d_{j+1,j}} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-j} \frac{d_{j,j+r}}{d_{j+r+1,j+r}} \left[\widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(y)\widehat{P}^{(j+r)}_{n-j-r}(x) - \widehat{P}^{(j)}_{n-j}(x)\widehat{P}^{(j+r)}_{n-j-r-1}(y)\right] \end{aligned}$$

y que

$$\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z) - \widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(z)\widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(z) = \tag{5.9}$$

$$= \sum_{r=1}^{n-j} \frac{d_{j,j+r}}{d_{j+r+1,j+r}} \left[\widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(z)\widehat{P}^{(j+r)}_{n-j-r}(z) - \widehat{P}^{(j)}_{n-j}(z)\widehat{P}^{(j+r)}_{n-j-r-1}(z)\right].$$

Dem. Normalizando en (5.5) se tiene que

$$\widehat{P}^{(j-1)}_{n-j}(x)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(y) - \widehat{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(y)\widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(x) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)}{[d_{j+1,j}\dots d_{n,n-1}]\,[d_{j+2,j+1}\dots d_{n+1,n}]} - \frac{\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(y)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)}{[d_{j+1,j}\dots d_{n+1,n}]\,[d_{j+2,j+1}\dots d_{n,n-1}]} \\ &= \frac{1}{[d_{j+1,j}\dots d_{n+1,n}]\,[d_{j+2,j+1}\dots d_{n,n-1}]}[(x-y)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y) + \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-j}(d_{j,j+r})\,[d_{j+1,j}\dots d_{j+r,j+r-1}]\left[\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widetilde{P}^{(j+r)}_{n-j-r}(x) - \widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widetilde{P}^{(j+r)}_{n-j-r-1}(y)\right]] \\ &= \frac{x-y}{d_{j+1,j}}\widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(y) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-j}\frac{d_{j,j+r}}{d_{j+r+1,j+r}}\left[\widehat{P}^{(j)}_{n-j}(y)\widehat{P}^{(j+r)}_{n-j-r}(x) - \widehat{P}^{(j)}_{n-j-1}(x)\widehat{P}^{(j+r)}_{n-j-r-1}(y)\right]. \end{aligned}$$

Y haciendo $x = y = z$, resulta la segunda parte. $\square$

Basta hacer $j = 1$ en (5.9) para obtener:

$$\widehat{P}_{n-1}(z)\widehat{P}^{(1)}_{n-1}(z) - \widehat{P}_n(z)\widehat{P}^{(1)}_{n-2}(z) = \tag{5.10}$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{d_{1,r+1}}{d_{r+2,r+1}} \left[\widehat{P}^{(1)}_{n-2}(z)\widehat{P}^{(r+1)}_{n-r-1}(z) - \widehat{P}^{(1)}_{n-1}(z)\widehat{P}^{(r+1)}_{n-r-2}(z)\right].$$

Proposición 6 *En las mismas condiciones, se verifica la siguiente fórmula:*

$$\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z) - \widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(z) = \tag{5.11}$$

$$= [(-d_{j+1,j})...(-d_{n,n-1})] \begin{vmatrix} -d_{j,j+1} & -d_{j,j+2} & \cdots & -d_{j,n-1} & -d_{j,n} \\ z-d_{j+1,j+1} & -d_{j+1,j+2} & \cdots & -d_{j+1,n-1} & -d_{j+1,n} \\ -d_{j+2,j+1} & z-d_{j+2,j+2} & \cdots & -d_{j+2,n-1} & -d_{j+2,n} \\ 0 & -d_{j+3,j+2} & \cdots & -d_{j+3,n-1} & -d_{j+3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z-d_{n-1,n-1} & -d_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Dem. Consideramos el polinomio asociado $\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(z)$ en forma de determinante

$$\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(z) = \begin{vmatrix} z-d_{j,j} & -d_{j,j+1} & -d_{j,j+2} & \cdots & -d_{j,n-1} & -d_{j,n} \\ -d_{j+1,j} & z-d_{j+1,j+1} & -d_{j+1,j+2} & \cdots & -d_{j+1,n-1} & -d_{j+1,n} \\ 0 & -d_{j+2,j+1} & z-d_{j+2,j+2} & \cdots & -d_{j+2,n-1} & -d_{j+2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-d_{n-1,n-1} & -d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -d_{n,n-1} & z-d_{n,n} \end{vmatrix}$$

y le aplicamos la *regla de las cuatro esquinas* o identidad determinante de Sylvester, véase [4], página 31, o bien [5], páginas 6 y 7, resulta

$$\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(z) = \widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z)$$

$$-\begin{vmatrix} -d_{j+1,j} & z-d_{j+1,j+1} & -d_{j+1,j+2} & \cdots & -d_{j+1,n-1} \\ 0 & -d_{j+2,j+1} & z-d_{j+2,j+2} & \cdots & -d_{j+2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-d_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -d_{n,n-1} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} -d_{j,j+1} & -d_{j,j+2} & \cdots & -d_{j,n-1} & -d_{j,n} \\ z-d_{j+1,j+1} & -d_{j+1,j+2} & \cdots & -d_{j+1,n-1} & -d_{j+1,n} \\ -d_{j+2,j+1} & z-d_{j+2,j+2} & \cdots & -d_{j+2,n-1} & -d_{j+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z-d_{n-1,n-1} & -d_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

y teniendo en cuenta que el primero de estos determinantes es triangular y vale $[(-d_{j+1,j})...(-d_{n,n-1})]$, se obtiene la fórmula indicada. $\square$

Las fórmulas (5.6) y (5.11) son dos expresiones de la misma combinación de polinomios.

Observamos que el primer miembro de la fórmula (5.11) es la diferencia entre dos polinomios mónicos de grado $2n-2j$, mientras que en el segundo miembro tenemos un determinante de orden $n-j$, representando un polinomio de grado $n-j-1$.

Esto nos indica que los polinomios $\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(z)$ y $\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(z)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(z)$ tienen iguales sus primeros $n-j+1$ coeficientes.

El hecho de la igualdad de los primeros coeficientes es especialmente interesante si hacemos $j=1$, pues en este caso resulta que los polinomios

$$\widetilde{P}_{n-1}(z)\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(z) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{P}_{n}(z)\widetilde{P}^{(1)}_{n-2}(z),$$

de grado $2n-2$, tienen iguales sus n primeros coeficientes.

Por tanto, la sucesión $\{\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(z)/\widetilde{P}_n(z)\}$ será de Cauchy en cuanto que tienda a cero el cociente

$$\frac{Q_{n-2}(z)}{\widetilde{P}_n(z)\widetilde{P}_{n-1}(z)},$$

donde es $Q_{n-2}(z) = \widetilde{P}_{n-1}(z)\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(z) - \widetilde{P}_n(z)\widetilde{P}^{(1)}_{n-2}(z)$.

Ejemplo 5 En el caso tridiagonal, real o complejo, resulta que los dos determinantes que aparecen en la demostración de la Proposición 6 son triangulares, desaparecen los signos menos, y por la simetría queda, en el caso real

$$\widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j}(x) - \widetilde{P}^{(j-1)}_{n-j+1}(x)\widetilde{P}^{(j)}_{n-j-1}(x) = \prod_{i=j}^{n-1} d_{i+1,i}d_{i,i+1} = \prod_{i=j}^{n-1}(d_{i+1,i})^2 = \prod_{i=j}^{n-1}\gamma_i. \tag{5.12}$$

y en el complejo, como $d_{i+1,i} = \overline{d_{i,i+1}}$, resulta

$$\prod_{i=j}^{n-1} d_{i+1,i}d_{i,i+1} = \prod_{i=j}^{n-1} d_{i,i+1}\overline{d_{i,i+1}} = \prod_{i=j}^{n-1} |d_{i,i+1}|^2 = \prod_{i=j}^{n-1}\gamma_i.$$

En particular para $j = 1$ resulta la relación clásica, véase [5], fórmula 4.4 de la página 86,

$$\widetilde{P}_{n-1}(x)\widetilde{P}^{(1)}_{n-1}(x) - \widetilde{P}_n(x)\widetilde{P}^{(1)}_{n-2}(x) = \prod_{i=1}^{n-1}\gamma_i,$$

análoga también al Corolario 2.8 de [2].

Agradecimiento Este trabajo ha sido realizado como parte del proyecto MTM 2016-80582-R (AEI/FEDER, U.E.) del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad.

Bibliografía

[1] D. Barrios, G. López, E. Torrano, Location of Zeros and Asymptotics of Polynomials satisfying three-term recurrence relations with complex coefficients, *Math. Sbornik,* Vol 184, **11** (1994), 63-92.

[2] S. Belmehdi, On the Associated Orthogonal Polynomials, *J. Comp. Appl. Math.* **32** (1990), 311-319.

[3] T.S. Chihara, *An Introduccion to Orthogonal Polynomials* Gordon and Breach, New York, 1978.

[4] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices,* Chelsea Publishing Company, New York, 1974.

[5] I.S. Iohvodov, *Hankel and Toeplitz Matrices and Forms, Algebraic Theory,* Birkhauser, 1982.

[6] E.M. Nikishin, V.N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality,* Translation of Mathematical Monographs, **92**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[7] V. Tomeo, Subnormalidad de la matriz de Hessenberg asociada a los P.O. en el caso hermitiano, Tesis doctoral, Madrid, 2004.

[8] V. Tomeo, E. Torrano, Matrices y Polinomios Ortogonales, Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos, Universidad Complutense de Madrid, CT 01-2019, Madrid, 2019.

[9] E. Torrano, Interpretación matricial de los Polinomios Ortogonales Tesis doctoral, Universidad de Santander, 1987.

[10] E. Torrano, R. Guadalupe, On the Moment Problem in the Bounded case, *J. Comp. Appl. Math.* **49** (1993) 263-269.

[11] W. Van Assche, Orthogonal Polynomials, Associated Polynomials and Functions of Second Kind, *J. Comp. Appl. Math.* **37** (1991) 237-249.

Cuadernos de Trabajo
Facultad de Estudios Estadísticos

CT04/2019 **Relaciones entre las medias estadísticas: demostraciones**
Elena Castiñeira Holgado y Venancio Tomeo Perucha

CT03/2019 **Introducción a MAPLE. Versión 18**
Juan Julián Ávila Tejera

CT02/2019 **Breve historia del cálculo integral. Cálculo integral elemental**
Juan Julián Ávila Tejera

CT01/2019 **Matrices y polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT03/2018 **Las matemáticas en el cine**
Gloria Cabrera Gómez

CT02/2018 **Brecha madre-padre en el uso de las medidas de conciliación y su efecto sobre las carreras profesionales de las madres**
José Andrés Fernández Cornejo y Lorenzo Escot (Coordinadores)
Autores: José Andrés Fernández Cornejo, Lorenzo Escot, Eva María del Pozo, Sabina Belope Nguema, Cristina Castellanos Serrano, Miryam Martínez, Ana Bernabeu, Lorenzo Fernández Franco, Juan Ignacio Cáceres, María Ángeles Medina Sánchez

CT01/2018 **El campo de valores de una matriz y su aplicación a los polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT02/2015 **Prospectiva del proceso electoral a Rector de la Universidad Complutense 2015. Resultados del sondeo de intención de voto en primera y segunda vuelta**
Lorenzo Escot Mangas, Eduardo Ortega Castelló, Lorenzo Fernández Franco y Kenedy Alba (Coordinadores)

CT01/2015 **The polemic but often decisive contribution of computer science to linguistic and statistical research on translation accuracy and efficiency**
Antonio Ñíguez Bernal

CT05/2014 **Las medidas estadísticas: ejercicios motivadores**
Almudena Pajares García y Venancio Tomeo Perucha

CT04/2014 **Jugando con la estadística (y la probabilidad)**
Gloria Cabrera Gómez

CT03/2014 **Análisis Estadístico de las Consultas a la Base de Datos de Ayudas e Incentivos a Empresas de la Dirección General de Industria y de la PYME.**
Adolfo Coello de Portugal Muñoz, Juana María Alonso Revenga

CT02/2014 **Values of games with weighted graphs**
E. González-Arangüena, C. Manuel; M. del Pozo

CT01/2014 **Estimación de la tasa de retorno de la carta del censa de los Estados Unidos a través del modelo de regresión lineal y técnicas de predicción inteligentes.**
José Luis Jiménez-Moro y Javier Portela García Miguel

CT03/2013 **Provisión de siniestros de incapacidad temporal utilizando análisis de supervivencia.**
Ana Crespo Palacios y Magdalena Ferrán Aranaz

CT02/2013 **Consumer need for touch and Multichannel Purchasing Behaviour.**
R. Manzano, M. Ferrán y D. Gavilán

CT01/2013 **Un método gráfico de comparación de series históricas en el mercado bursátil.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2012 **Calculando la matriz de covarianzas con la estructura de una red Bayesiana Gaussiana**
Miguel A. Gómez Villegas y Rosario Susi

CT02/2012 **What's new and useful about chaos in economic science.**
Andrés Fernández Díaz, Lorenzo Escot and Pilar Grau-Carles

CT01/2012 **A social capital index**
Enrique González-Arangüena, Anna Khmelnitskaya, Conrado Manuel, Mónica del Pozo

CT04/2011 **La metodología del haz de rectas para la comparación de series temporales.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2011 **Game Theory and Centrality in Directed Social Networks**
Mónica del Pozo, Conrado Manuel, Enrique González-Arangüena y Guillermo Owen.

CT02/2011 **Sondeo de intención de voto en las elecciones a Rector de la Universidad Complutense de Madrid 2011**
L.Escot, E. Ortega Castelló y L. Fernández Franco (coords)

CT01/2011 **Juegos y Experimentos Didácticos de Estadística y Probabilidad**
G. Cabrera Gómez y Mª.J. Pons Bordería

CT04/2010 **Medio siglo de estadísticas en el sector de la construcción residencial**
M. Ferrán Aranaz

CT03/2010 **Sensitivity to hyperprior parameters in Gaussian Bayesian networks.**
M.A. Gómez-Villegas, P. Main, H. Navarro y R. Susi

CT02/2010 **Las políticas de conciliación de la vida familiar y laboral desde la perspectiva del empleador. Problemas y ventajas para la empresa.**
R. Albert, L. Escot, J.A. Fernández Cornejo y M.T. Palomo

CT01/2010 **Propiedades exóticas de los determinantes**
Venancio Tomeo Perucha

CT05/2009 **La predisposición de las estudiantes universitarias de la Comunidad de Madrid a auto-limitarse profesionalmente en el futuro por razones de conciliación**
R. Albert, L. Escot y J.A. Fernández Cornejo

CT04/2009 **A Probabilistic Position Value**
A. Ghintran, E. González–Arangüena y C. Manuel

CT03/2009 **Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores**
A. Pajares García y V. Tomeo Perucha

CT02/2009 **La disposición entre los hombres españoles a tomarse el permiso por nacimiento. ¿Influyen en ello las estrategias de conciliación de las empresas?**
L. Escot, J.A. Fernández-Cornejo, C. Lafuente y C. Poza

CT01/2009 **Perturbing the structure in Gaussian Bayesian networks**
R. Susi, H. Navarro, P. Main y M.A. Gómez-Villegas

CT09/2008 **Un experimento de campo para analizar la discriminación contra la mujer en los procesos de selección de personal**
L. Escot, J.A. Fernández Cornejo, R. Albert y M.O. Samam

CT08/2008 **Laboratorio de Programación. Manual de Mooshak para el alumno**
D. I. de Basilio y Vildósola, M. González Cuñado y C. Pareja Flores

CT07/2008 **Factores de protección y riesgo de infidelidad en la banca comercial**
J. Mª Santiago Merino

CT06/2008 **Multinationals and foreign direct investment: Main theoretical strands and empirical effects**
María C. Latorre

CT05/2008 **On the Asymptotic Distribution of Cook's distance in Logistic Regression Models**
Nirian Martín y and Leandro Pardo

CT04/2008 **La innovación tecnológica desde el marco del capital intelectual**
Miriam Delgado Verde, José Emilio Navas López, Gregorio Martín de Castro y Pedro López Sáez

CT03/2008 **Análisis del comportamiento de los indecisos en procesos electorales: propuesta de investigación funcional predictivo-normativa**
J. Mª Santiago Merino

CT02/2008 **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi

CT01/2008 **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González–Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den B

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID