CUADERNOS DE TRABAJO

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Triángulos y matrices de Pascal

Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

Cuaderno de Trabajo número 01/2020

UCM

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Facultad para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Facultad www.ucm.es/BUCM/est/, en la página del Repositorio Institucional UCM E-Prints Complutense y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO:

Biblioteca de la Facultad de Estudios Estadísticos

Universidad Complutense de Madrid

Av. Puerta de Hierro, S/N

28040 Madrid

Tlf. 913944035

buc_est@buc.ucm.es

ISSN: 2341-2550

Triángulos y matrices de Pascal

Venancio Tomeo
Dpto. Álgebra, Geometría y Topología
Facultad Estudios Estadísticos, UCM
tomeo@ucm.es

Emilio Torrano
Dpto. Matemática Aplicada
Escuela Superior de Ingenieros Informáticos, UPM
emilio@fi.upm.es

12 de noviembre de 2020

Resumen:
El presente trabajo parte del triángulo aritmético y los números combinatorios, para estudiar algunas de sus aplicaciones, generalizar el concepto de matriz de Pascal, permitiendo que la primera fila y la primera columna sean sucesiones cualesquiera de números reales o complejos, y estudiar la relación de las matrices de Pascal con las matrices de Toeplitz y con las transformaciones binomiales, para relacionar de modo algebraico estas dos clases de matrices, en cuanto a si son o no son matrices hermitianas, si son o no definidas positivas y si son o no matrices de momentos.

Palabras clave
Triángulo de Pascal, números combinatorios, triángulo aritmético, matrices de Pascal, matrices de Toeplitz, transformación binomial, matrices hermitianas definidas positivas (*HPD*), *matrices de momentos.*

Contenido

1. Triángulo de Pascal

El triángulo que contiene los valores de los números combinatorios se ha llamado *triángulo aritmético*, *triángulo de Tartaglia* y *triángulo de Pascal*. El nombre que se utiliza con más frecuencia es *triángulo aritmético de Pascal* para diferenciarlo del *triángulo infinitesimal* o *triángulo característico* que Pascal utilizó en la cuadratura del seno.

1 $\leftarrow$ *fila 0*
1 1 $\leftarrow$ *fila 1*
1 2 1 $\leftarrow$ *fila 2*
1 3 3 1 $\leftarrow$ *fila 3*
1 4 6 4 1 $\vdots$
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

La razón de haberse llamado triángulo de Tartaglia radica en que en el *General trattato di numeri et misure*, libro póstumo e incabado publicado en seis tomos en Venecia entre 1556 y 1560, Niccolò Fontana, también llamado Niccolò Tartaglia de Brescia ($\simeq$1500-1557), utiliza el triángulo aritmético en un cálculo combinatorio y en la búsqueda de raíces de índices superiores. En ese libro aparece el rectángulo de la izquierda siguiente.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

La razón de que sea conocido como triángulo de Pascal es porque Blaise Pascal (1623-1662) estudió las propiedades del triángulo, relacionó el estudio de las probabilidades con el triángulo y descubrió y demostró la propiedad de la suma de términos de una diagonal mediante el uso de la inducción completa, en un escrito póstumo de 1654 titulado *Triangle arithmetique,* donde aparecen los números combinatorios con su expresión general y algunas de sus propiedades. El triángulo de Pascal aparece como está en la figura derecha anterior, en forma matricial. Sin embargo el concepto de matriz no aparecerá hasta varios siglos después.

La primera vez que el triángulo apareció impreso en una obra fue en 1527, en la *Aritmética* de Petrus Apianus (1495-1552), un siglo antes de que Pascal estudiase sus propiedades. Ni Tartaglia, ni Pascal, ni Apianus inventaron el triángulo, que era conocido mucho antes en India y en China.

Umar Khayyam (≃1038-1123), autor de *Álgebra*, dice conocer el método para hallar las potencias del binomio en un obra que no ha llegado a nosotros. Esta regla se conocía en China en la misma época, pero debe tratarse de un descubrimiento independiente porque apenas había comunicación en esa época.

Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) publicó en 1255 la *Colección aritmética con ayuda de la tabla y el polvo,* que contiene los elementos de los exponentes hasta la fila 12 en forma de triángulo y la propiedad de la suma de números combinatorios consecutivos. Es muy posible que este resultado no llegara a tiempo a Europa y fue preciso volver a descubrirlo.

Las obras de Yang Huei (1261-1275) incluyen el triángulo de Pascal hasta la sexta fila y lo mismo en otras obras chinas hacia 1100. Sin embargo, es más conocido por aparecer publicado en el *Espejo precioso* de Chu Shih-Chiech (1280-1303). El espejo precioso contiene una diagrama del triángulo hasta la octava fila. Chu lo llama "diagrama del viejo método para hallar potencias octavas y menores".

En la obra de Al-Kashi (¿?-≃1436) se encuentra también el teorema del binomio en la forma de triángulo de Pascal, un siglo más o menos después de la publicación en China y un siglo antes de que apareciese impreso en libro en Europa.

Para conocer más detalles de la interesante historia del triángulo, véanse [1], [3], [4] y [6], entre otros.

2. Números combinatorios

Recordamos que si n es un número natural, se define *factorial* de n, y se denota por $n!$, al número

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

producto de los n factores consecutivos decrecientes que existen entre n y 1.

De la propia definición de factorial se deduce la validez de las dos fórmulas siguientes

$$n! = n(n-1)! \qquad\qquad n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$$

Admitiremos por convenio que $0! = 1$ y que $1! = 1$.

El número de *combinaciones* n-arias que pueden obtenerse con m objetos dados está dado por C_m^n y este número coincide con el *número combinatorio* y suele escribirse en la forma

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Propiedades importantes de los números combinatorios

1. *Números combinatorios extremos:*

$$\binom{m}{0} = 1, \qquad\qquad \binom{m}{m} = 1.$$

2. *Números combinatorios complementarios:*

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}.$$

3. *Suma de números combinatorios consecutivos:*

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}.$$

4. Suma de una fila completa de números combinatorios:

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m-1}+\binom{m}{m}=2^m.$$

Las demostraciones de todas estas propiedades son triviales a partir de la fórmula con factoriales y aparecen en los libros de Cálculo de probabilidades y de Matemática discreta.

Estas propiedades y muchas otras se encuentran reflejadas en el llamado *triángulo aritmético* o *de Pascal*, que es una disposición triangular de números combinatorios, en la que las primeras filas son las siguientes:

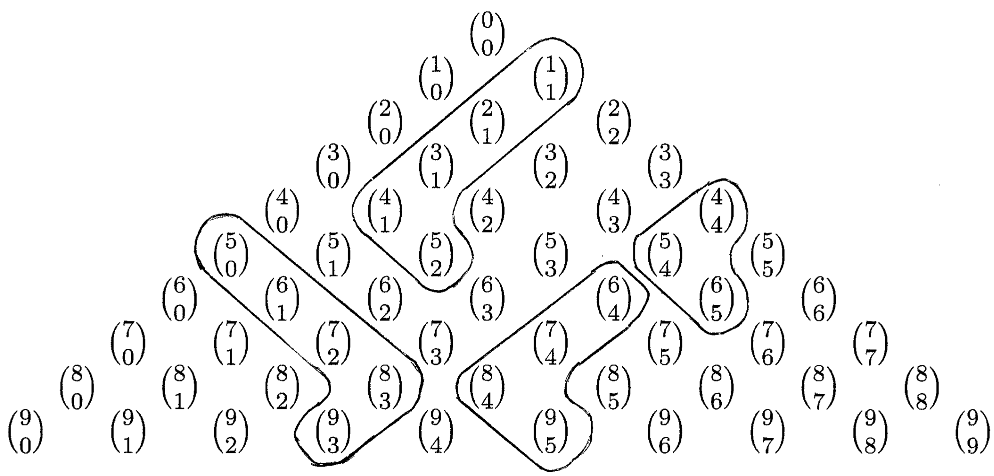
$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&\binom{0}{0}&&&&&&\leftarrow&\textit{fila}&\textit{0}\\
&&&&&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&&&&&\\
&&&&&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&&&&&\\
&&&&&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&&&&&\\
&&&&\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}&&&&\\
&&&\binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5}&&&\\
&&\binom{6}{0}&&\binom{6}{1}&&\binom{6}{2}&&\binom{6}{3}&&\binom{6}{4}&&\binom{6}{5}&&\binom{6}{6}&&\\
&\binom{7}{0}&&\binom{7}{1}&&\binom{7}{2}&&\binom{7}{3}&&\binom{7}{4}&&\binom{7}{5}&&\binom{7}{6}&&\binom{7}{7}&\\
\binom{8}{0}&&\binom{8}{1}&&\binom{8}{2}&&\binom{8}{3}&&\binom{8}{4}&&\binom{8}{5}&&\binom{8}{6}&&\binom{8}{7}&&\binom{8}{8}
\end{array}$$

Hay otras propiedades interesantes, las dos siguientes fueron descubiertas y demostradas por Pascal en su *Triangle arithmetique:*

5. Suma de una diagonal hasta un número combinatorio concreto:

$$\begin{aligned}
\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{2}+\cdots+\binom{m+h}{h} &= \binom{m+h+1}{h},\\
\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{m+h}{m} &= \binom{m+h+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

La Propiedad 5 nos dice que la suma de términos consecutivos de una diagonal que comienza en el borde es igual al número de la fila inferior que forma con la anterior un ángulo recto, y puede hacerse con diagonales paralelas a una u otra diagonal extrema, como puede verse en la figura siguiente



Ejemplo 1. Tomando números combinatorios a partir del $\binom{5}{0}$ se tiene que

$$\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} = \binom{9}{3}.$$

Ejemplo 2. De forma análoga por simetría resulta que

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} = \binom{5}{2}.$$

Ejemplo 3. Si la suma de términos de una diagonal no comienza en el borde, basta restarle la suma de los anteriores obtenida del mismo modo, por lo que

$$\binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{9}{5} - \binom{6}{5}.$$

Demostración de la Propiedad 5:

Utilizando sucesivamente la Propiedad 3 podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\binom{m+h+1}{h} &= \binom{m+h}{h-1} + \binom{m+h}{h} \\
\binom{m+h}{h-1} &= \binom{m+h-1}{h-2} + \binom{m+h-1}{h-1} \\
\binom{m+h-1}{h-2} &= \binom{m+h-2}{h-3} + \binom{m+h-2}{h-2} \\
&\vdots \\
\binom{m+3}{2} &= \binom{m+2}{1} + \binom{m+2}{2} \\
\binom{m+2}{1} &= \binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{1} \\
\binom{m+1}{0} &= \binom{m}{0}
\end{aligned}$$

donde cada primer miembro coincide con el primer sumando de la parte derecha de la línea anterior. Sumando y cancelando los términos iguales resulta

$$\binom{m+h+1}{h} = \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+h}{h}.$$

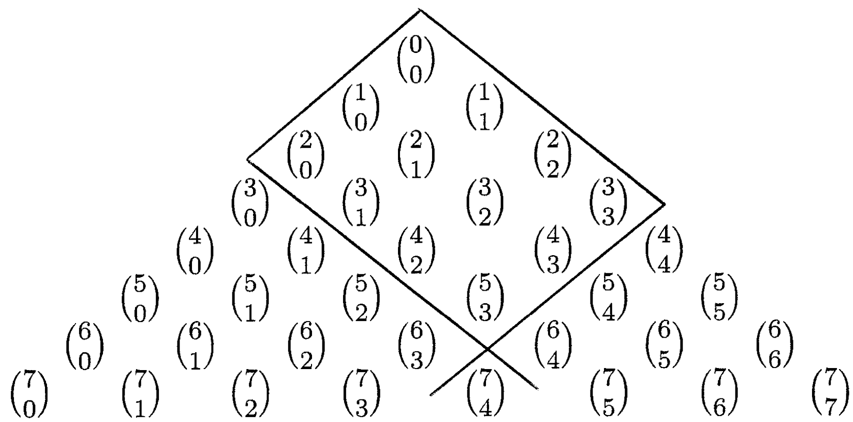
Pasando a complementarios en ambos miembros, se obtiene la segunda opción de esta propiedad:

$$\binom{m+h+1}{m+1} = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+h}{m}.$$

6. *Propiedad del rectángulo:*

Si se trazan dos paralelas a las diagonales extremas formando un rectángulo, la suma de todos los números interiores al rectángulo más una unidad es el número que ocupa el vértice inferior externo al rectángulo.

Ejemplo 4. Si sumamos los números que hay dentro del rectángulo de la figura:



y añadimos una unidad, la suma es

$$\tbinom{0}{0}+\tbinom{1}{1}+\tbinom{2}{2}+\tbinom{3}{3}+\tbinom{1}{0}+\tbinom{2}{1}+\tbinom{3}{2}+\tbinom{4}{3}+\tbinom{2}{0}+\tbinom{3}{1}+\tbinom{4}{2}+\tbinom{5}{3}+1=\tbinom{7}{4},$$

es decir

$$(1+1+1+1)+(1+2+3+4)+(1+3+6+10)+1=34+1=35.$$

Demostración de la Propiedad 6:

Sea $\binom{m}{k}$ el número combinatorio que ocupa el vértice inferior externo al rectángulo. Tenemos que sumar todos los números que están dentro del rectángulo, lo hacemos agrupando los paralelos a la diagonal externa de la izquierda y son

$$\begin{aligned}&\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\cdots+\binom{k-2}{0}+\\&\quad+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\cdots+\binom{k-1}{1}+\\&\quad+\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{k}{2}+\cdots+\\&\quad+\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\cdots+\binom{m-2}{k-1}.\end{aligned}$$

Utilizando la Propiedad 5 para cada una de estas líneas, la suma anterior es igual que

$$\binom{k-1}{1}+\binom{k}{2}+\binom{k+1}{3}+\cdots+\binom{m-1}{k},$$

y volviendo a aplicar la Propiedad 5 a esta suma, en la que falta $\binom{k-2}{0}=1$, resulta

$$\binom{m}{k}-1,$$

por tanto, la suma de todos los números combinatorios del rectángulo, aumentada en una unidad, es igual al número combinatorio $\binom{m}{k}$, situado en el vértice inferior externo al rectángulo.

Cálculo abreviado de una fila sin conocer las anteriores. La fila m es claro que es

$$\binom{m}{0},\binom{m}{1},\binom{m}{2},\ldots,\binom{m}{m}.$$

Para pasar de un término de esta fila al siguiente bastará multiplicar convenientemente. Como son

$$\binom{m}{k+1}=\frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}=\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{m-k}{k+1}=\binom{m}{k}\frac{m-k}{k+1},$$

tenemos que mutiplicando un número combinatorio por la fracción del final se obtiene el siguiente número combinatorio de la fila.

Ejemplo 5. Si queremos calcular la fila 11 del triángulo, sabemos que los primeros términos son

1, 11, ...

los siguientes se van obteniendo del siguiente modo:

$$\begin{aligned}11\cdot\frac{11-1}{1+1} &= 11\cdot\frac{10}{2}=55,\\ 55\cdot\frac{11-2}{2+1} &= 55\cdot\frac{9}{3}=165,\\ 165\cdot\frac{11-3}{3+1} &= 165\cdot\frac{8}{4}=330,\end{aligned}$$

donde la fracción por la que multiplicamos va disminuyendo en 1 el numerador y aumentando en 1 el denominador. La fila 11 es, por tanto:

$$1,\ 11,\ 55,\ 165,\ 330,\ 330 \cdot \tfrac{7}{5} = 462,\ 462 \cdot \tfrac{6}{6} = 462,\ 330,\ 165,\ 55,\ 11,\ 1.$$

3. Aplicaciones de los números combinatorios

Coeficientes del desarrollo del binomio

Para calcular las potencias del binomio $(a+b)^n$ se puede utilizar el triángulo aritmético, lo que evita tener que hacer $n-1$ multiplicaciones. Si n es pequeño se construye el triángulo hasta la fila n, si es grande se utilizan los números combinatorios.

Ejemplo 6. Para calcular $(a+b)^5$ miramos los números de la fila 5 del triángulo, que son 1, 5, 10, 10, 5, 1, y se tiene que es

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

En general la fórmula del binomio de Newton es

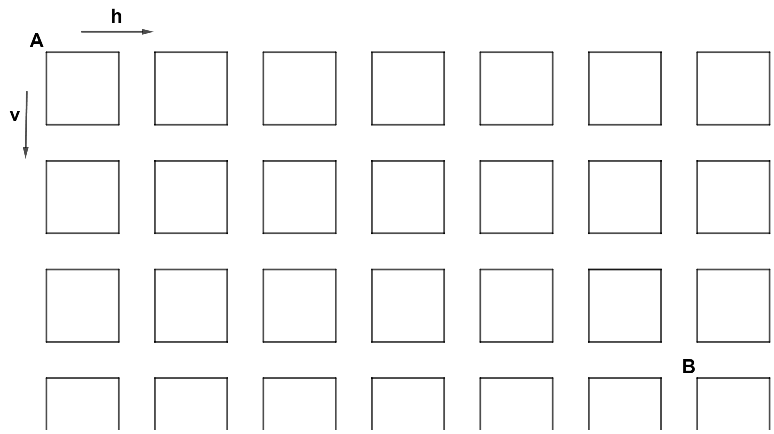
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

que puede demostrarse fácilmente por inducción.

Número de caminos en una ciudad cuadriculada

Si estamos en una ciudad con calles perpendiculares y queremos ir de un cruce a otro por un camino corto, tenemos muchas posibilidades o pocas dependiendo de donde estén situados los cruces elegidos.

Ejemplo 7. El siguiente plano es de una ciudad donde se representan algunas de las calles. Una persona que se encuentra en el cruce A desea ir al curce B haciendo recorridos en horizontal a la derecha y en vertical hacia abajo para que el camino sea uno de los más cortos posibles. Se desea saber cuántos caminos de longitud mínima se pueden seguir para ir del cruce A al cruce B.



El número de caminos posibles es el número de ordenaciones que se pueden hacer con las letras $hhhhhhvvv$, y coincide con el número de combinaciones C_9^6, es decir, elegir en qué momento se toman los seis caminos horizontales y en qué otro los tres caminos verticales.

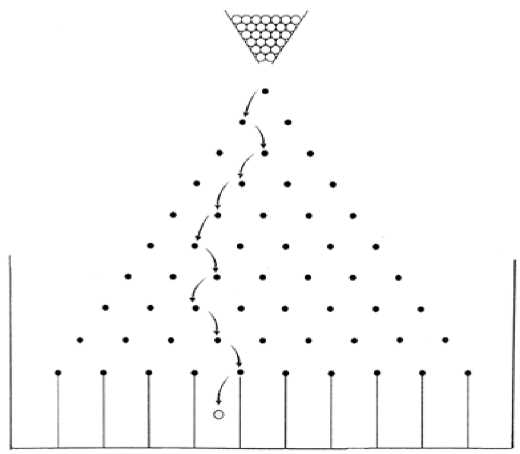
El problema se resuelve también con permutaciones con repetición $PR_9^{6,3}$. Se supone conocido que en el caso de permutaciones con repetición de solo dos modalidades, en este caso h y v, éstas coinciden con las combinaciones, es decir $PR_9^{6,3} = C_9^6 = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$ caminos posibles.

En el librito de Uspenski, [10], se propone que llegan 2^{1000} hombres al punto A de una ciudad mucho mayor y que en cada cruce la mitad van a un lado y la otra mitad al otro, hacia la derecha o hacia abajo, recorriendo 1000 tramos de calle, y se pregunta cuántos llegarán a cada punto? La respuesta es que la distribución de los hombres será como la de la fila 1000 del triángulo aritmético:

$$\binom{1000}{0}, \binom{1000}{1}, \binom{1000}{2}, \binom{1000}{3}, \ \dots, \binom{1000}{1000}.$$

Relación con el aparato de Galton-Pearson

El aparato de Galton, o de Galton-Pearson, también llamado *demostrador geométrico* de la probabilidad, es una tabla por la que se dejan caer bolas, fichas o monedas que al chocar con los clavos pueden ir a un lado u otro con igual probabilidad, como se observa en la siguiente figura:



Ejemplo 8. En el aparato del dibujo, que tiene diez filas de clavos contando que el primero distribuye la mitad a cada lado y hace las veces de fila 1, si dejamos caer 2^{10} bolas se distribuirán aleatoriamente, unas veces de una manera y otras veces de otras, pero en promedio se van a distribuir según los caminos que existen para llegar a cada casilla final. Estos caminos son:

$$1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252,\ 210,\ 120,\ 45,\ 10,\ 1,$$

que suman $2^{10} = 1024$ bolas.

Problema de los repartos

El problema de los repartos tiene su origen en la correspondencia entre Fermat y Pascal. En 1654 tratan de este problema, del que Pascal dará su correcta solución.

Se trata de determinar la cantidad que corresponde a cada uno de los jugadores, dos o más, cuando la partida se interrumpe de mutuo acuerdo por algún motivo. Algunos predecesores lo había resuelto mal, pero Pascal proporciona una solución rigurosa basada en el triángulo aritmético.

Pascal inicia el Cálculo de probabilidades y define el concepto de esperanza matemática. Los dos ejemplos siguientes nos lo da el propio Pascal.

Ejemplo 9. Dos jugadores jugadores A y B han acordado jugar hasta que uno de ellos haya conseguido 5 juegos. Si la partida se debe interrumpir cuando A lleva tres juegos ganados y B lleva uno, ¿cuál es la parte de la apuesta que corresponde a cada uno?

Lo que dice Pascal es que se consideren los juegos que le faltan a cada uno para terminar la partida, en este caso al A le faltan 2 juegos y al B le faltan 4 juegos. La suma es 6, por lo que debemos mirar en la fila 5 del triángulo aritmético, esta fila es $1-5-10-10-5-1$, que suman 32. Le corresponden al A los cuatro primeros números: $1+5+10+10=26$, y la B los dos últimos: $5+1=6$, por lo que sus probabilidades de ganar son $26/32$ y $6/32$, respectivamente. Así que, si la apuesta total que hicieron fue de 32 monedas, aportando 16 cada uno, le corresponde llevarse 26 y 6 monedas.

Si lo hacemos utilizando Cálculo de probabilidades, poniendo A cuando gana el primer jugador y B cuando gana el segundo, los casos en que A termina siendo ganador por haber completado sus cinco juegos son

$$AA, ABA, BAA, ABBA, BABA, BBAA, ABBBA, BABBA, BBABA, BBBAA,$$

y la probabilidad de que A resulte ganador es

$$\begin{aligned} p(A\ gana) &= P(AA)+P(ABA,BAA)+P(ABBA,BABA,BBAA)+\\ &\quad +P(ABBBA,BABBA,BBABA,BBBAA)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)^5=\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{13}{16}=\frac{26}{32} \end{aligned}$$

Los casos en que B resulte ganador son

$$BBBB, ABBBB, BABBB, BBABB, BBBAB,$$

y la probabilidad de que sea B el ganador es

$$\begin{aligned} p(B\ gana) &= P(BBBB)+P(ABBBB,BABBB,BBABB,BBBAB)=\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}=\frac{6}{32}. \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Si se trata de dos jugadores que han apostado 32 doblones cada uno, 64 doblones en total, y a uno le falta una partida y al otro dos para terminar, como $1+2=3$, miramos en la segunda fila del triángulo, que es $1-2-2-1$, cuya suma es 6, así que la probabilidad del primero es

$$\frac{1+2+2}{6}=\frac{5}{6}$$

y la del segundo es

$$\frac{1}{6},$$

por lo que en reparto les deben corresponder

$$\frac{5}{6}\cdot 64 = 53 \text{ doblones y } \frac{1}{3} \text{ a uno} \quad \text{y} \quad \frac{1}{6}\cdot 64 = 10 \text{ doblones y } \frac{2}{3} \text{ al otro.}$$

Los números figurados

Los números figurados son reminiscencia de los pitagóricos, los números poligonales de la éoca de Diofanto de Alejandría, siglo III d.C., sin utilidad práctica hoy en día. Los números figurados aparecen en el triángulo aritmético, como destaca Pascal en su trabajo *Divers usages du triangle arithméthique dont le générateur est l'unité.*

Los elementos de la diagonal extrema derecha del triángulo aritmético son todos unos. Los elementos de la segunda diagonal son los números naturales,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

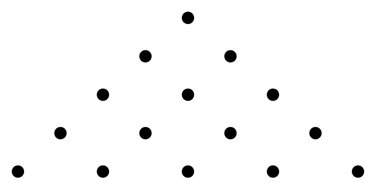
ya que cada uno se deduce del anterior sumándole 1. Los elementos de la tercera diagonal se llaman *triangulares*, y cada uno se obtiene de la sucesión anterior, sumándole el número correspondiente de la sucesión natural. La expresión del n-ésimo número triangular es, por tanto:

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2},$$

es decir,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

y representa el número de puntos de una red triangular que tenga n en la base, puesto que resultan por adiciones de los números naturales sucesivos.



De forma análoga los elementos de la cuarta diagonal se llaman *triángulo-piramidales* ya que representan el número de puntos de una pirámide que tiene por base un triángulo de orden n.

4. Primera generalización del triángulo de Pascal

Vamos a formar un triángulo con la misma ley del triángulo aritmético, cada término será suma de los dos contiguos de la fila anterior, pero partiendo de una primera diagonal a la izquierda con $a, a, a, ...$ y otra diagonal a la derecha con $b, b, b, ...$ En este caso no puede existir fila cero a no ser que sean $a = b$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & a & & & & b & & & \\
 & & a & & & a+b & & & b & & \\
 & a & & 2a+b & & & a+2b & & & b & \\
a & & 3a+b & & & 3a+3b & & & a+3b & & b \\
a & 4a+b & & 6a+4b & & & 4a+6b & & a+4b & & b
\end{array}
$$

Para $a = b = 1$ se obtiene el triángulo aritmético. Si es $a = b \neq 1$ tenemos el triángulo aritmético multiplicado por a, con las mismas propiedades.

Vamos a construir unos números de Pascal relativos a este triángulo. Para distinguirlos de los anteriores, los escribiremos en la forma

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}.$$

El triángulo con estos números tendrá la forma

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} & & & & \\
 & & & \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} & & & \\
 & & \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} & & \\
 & \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}
\end{array}
$$

y los valores de estos números combinatorios serán los del triángulo de arriba.

Propiedades importantes de estos números combinatorios

1. Números combinatorios extremos:

$$\begin{bmatrix}m\\0\end{bmatrix} = a, \qquad \begin{bmatrix}m\\m\end{bmatrix} = b.$$

2. Números combinatorios complementarios:

$$\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}(a,b) = \begin{bmatrix}m\\m-n\end{bmatrix}(b,a).$$

La Propiedad 2 indica que los números combinatorios complementarios pueden obtenerse uno del otro si se intercambian a y b.

3. Suma de números combinatorios consecutivos:

$$\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}m\\n+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}m+1\\n+1\end{bmatrix}.$$

4. Suma de una fila completa de números combinatorios:

$$\begin{bmatrix}m\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}m\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}m\\2\end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix}m\\m-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}m\\m\end{bmatrix} = 2^{m-1}(a+b).$$

5. Suma de una diagonal hasta un número combinatorio concreto:

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m+h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+h+1 \\ h \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+2 \\ h \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m+h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+h+1 \\ h+1 \end{bmatrix}.$$

Esta propiedad se verifica para todas las diagonales excepto para las diagonales extremas. Si definimos el número de la *fila cero* en la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

la Propiedad 5 se verifica también para las diagonales extremas en la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h+1 \\ h \end{bmatrix} + 1 - a,$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h+1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 - b.$$

6. Propiedad del rectángulo:

Si se trazan dos paralelas a las diagonales extremas formando un rectángulo, la suma de todos los números interiores al rectángulo añadiendo $a + b - 1$, *es el número que ocupa el vértice inferior externo al rectángulo.*

La suma de todos los números combinatorios dentro del rectángulo contiene al elemento $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, que es 1. Si los números del rectángulo se suman según la diagonal extrema derecha, hay que sumar $1 - a$, y si operamos sumando según la diagonal extrema izquierda hay que sumar $1 - b$. Estos números sustituyen al 1 que era preciso sumar en la Propiedad 6 de los números combinatorios habituales.

Las demostraciones de estas propiedades no son necesarias porque serán un caso particular de la siguiente generalización que vamos a hacer de los números combinatorios.

La Propiedad 3 la hemos tomado como definición recurrente a la hora de construir el triángulo, donde cada término es la suma de los dos que están en la fila anterior. Por tanto, lo que nos falta es una definición de estos números combinatorios independiente de los otros números, lo que hacemos a continuación:

Propiedad. Expresión de estos números combinatorios: se verifica que

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = \binom{m}{n+1} a + \binom{m}{n} b,$$

por lo que la expresión por medio de factoriales del número combinatorio es

$$\begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} a + \frac{m!}{n!(m-n)!} b.$$

Demostración de esta expresión por inducción completa.

Para $m = 1$ y $n = 1$ es $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = b$, para $m = 1$ y $n = 0$ es $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = a+b = \binom{1}{1}a + \binom{1}{0}b$, para $m = 2$ y $n = 1$ es

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = a + 2b = \binom{2}{2} a + \binom{2}{1} b.$$

Supongamos que la fórmula es cierta para m, n y $n+1$. Por la Propiedad 3 es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m+2 \\ n+2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+1 \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = \\ &= \binom{m}{n} a + \binom{m}{n-1} b + \binom{m}{n+1} a + \binom{m}{n} b = \\ &= \left[\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}\right] a + \left[\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}\right] b = \\ &= \binom{m+1}{n+1} a + \binom{m+1}{n} b. \end{aligned}$$

5. Números combinatorios generalizados

Vamos a cambiar la ley del triángulo de Pascal poniendo como primera diagonal a la izquierda los términos de una sucesión $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ y la otra diagonal a la derecha con los términos de otra sucesión $b_0, b_1, b_2, b_3, ...$, con $a_0 = b_0$. El triángulo generalizado tiene la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & a_0 & & & & \\ & & & a_1 & & b_1 & & & \\ & & a_2 & & a_1+b_1 & & b_2 & & \\ & a_3 & & a_1+a_2+b_1 & & a_1+b_1+b_2 & & b_3 & \\ a_4 & & a_1+a_2+a_3+b_1 & & 2a_1+a_2+2b_1+b_2 & & a_1+b_1+b_2+b_3 & & b_4 \end{array}$$

La ley de formación es la misma, cada número es suma de los dos contiguos situados en la línea anterior. Si ponemos como notación en este caso el símbolo siguiente:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$

la definición recurrente es

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix}$$

y necesitamos una Propiedad que nos determine el valor de este número combinatorio sin recurrencia, que pondremos como última de las propiedades.

Propiedades de los números combinatorios generalizados:

1. Números combinatorios extremos:

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = a_m, \qquad \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = b_m.$$

2. Números combinatorios complementarios:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}(a_j, b_k) = \begin{bmatrix} m \\ m-n \end{bmatrix}(b_j, a_k).$$

3. Suma de combinatorios consecutivos

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix}.$$

4. Suma de una fila de números combinatorios:

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = a_m + \sum_{j=1}^{m-1} 2^{m-j-1} a_j + b_m + \sum_{j=1}^{m-1} 2^{m-j-1} b_j.$$

5. Suma de una diagonal hasta un número combinatorio concreto:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m+h \\ h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+h+1 \\ h \end{bmatrix} - a_{m+1} + a_m, \\ \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+2 \\ m \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m+h \\ m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+h+1 \\ m+1 \end{bmatrix} - b_{m+1} + b_m. \end{aligned}$$

En este caso hay dos fórmulas según sumemos diagonales paralelas a la diagonal extrema derecha o a la izquierda, de acuerdo con el paso a complementarios de la Propiedad 2.

La figura siguiente muestra dos aplicaciones de la Propiedad 5, una para cada fórmula.

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}
\end{array}$$

Ejemplo 11. Tomando números combinatorios a partir del $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ se tiene que

$$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix} - a_4 + a_3.$$

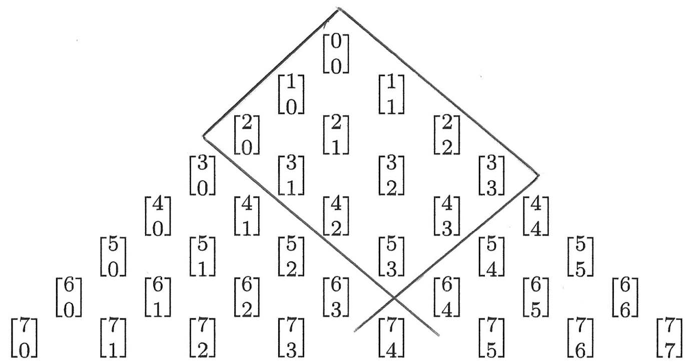
Ejemplo 12. De forma análoga por simetría resulta que

$$\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix} - b_5 + b_4.$$

6. Propiedad del rectángulo

Si se trazan dos paralelas a las diagonales extremas formando un rectángulo, la suma de todos los números interiores al rectángulo añadiendo la expresión $b_k + a_{m-k} - a_0$, es igual al número $\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}$ que ocupa el vértice inferior externo al rectángulo.

Ejemplo 13. Si sumamos los números que hay dentro del rectángulo de la figura siguiente



y añadimos la expresión $b_4 + a_3 - a_0$, la suma es

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} + (b_4 + a_3 - a_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} - a_1 + a_0 + \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} - a_2 + a_1 + \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} - a_3 + a_2 + (b_4 + a_3 - a_0) = \\
&= \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} - a_3 + a_0 + (b_4 + a_3 - a_0) + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} - b_4 + b_3 + b_4 - \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} + b_3 - b_3 = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Si ordenamos la suma en otro orden posible se tiene

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} + (b_4 + a_3 - a_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} - b_1 + b_0 + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} - b_2 + b_1 + \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} - b_3 + b_2 + \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} - b_4 + b_3 + (b_4 + a_3 - a_0) = \\
&= \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix} - b_4 + b_0 + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + (b_4 + a_3 - a_0) = \\
&= \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} - a_3 + a_2 + b_0 - a_2 + a_3 - a_0 = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix} + b_0 - a_0 = \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado. En este caso tenemos dos formas diferentes de sumar que nos dan el valor del número combinatorio del vértice inferior externo.

Se observa que los números combinatorios que es preciso sumar en este caso son $\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} = b_4$ y $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = a_3$, que están situados exactamente debajo de los vértices izquierdo y derecho del rectángulo, mientras que es preciso restar $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = a_0$ que es el vértice superior.

EJEMPLO 14. El número combinatorio $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$ puede obtenerse sumando todos los términos que hay en el rectángulo correspondiente, si añadimos $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = b_5$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = a_2$ y restamos $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_0$. Es decir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + b_5 + a_2 - a_0. \end{aligned}$$

Expresión del número combinatorio generalizado: Se tiene que:

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m-n-1} \binom{n-1+k}{k} a_{m-n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-n-1+k}{k} b_{n-k}.$$

Demostración de la Propiedad 4:

Si es $m = 1$ se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 + b_1 = a_1 + \sum_{j=1}^{0} 2^{1-j-1} a_j + b_1 + \sum_{j=1}^{0} 2^{1-j-1} b_j.$$

Si es $m = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= a_2 + a_1 + b_2 + b_1 = \\ &= a_2 + \sum_{j=1}^{1} 2^{2-j-1} a_j + b_2 + \sum_{j=1}^{1} 2^{2-j-1} b_j = a_2 + a_1 + b_2 + b_1. \end{aligned}$$

Si la fórmula es cierta para el valor $m = k$, es decir

$$\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} k \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} = a_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} a_j + b_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} b_j$$

considerando que

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{k+1} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} k+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = b_{k+1},$$

resulta

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+1 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+1 \\ k+1 \end{bmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{k+1} + \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ k-1 \end{bmatrix} + b_{k+1} = \\
&= a_{k+1} + \left(\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} k \\ k-1 \end{bmatrix} \right) + b_{k+1} = \\
&= a_{k+1} + \left(a_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} a_j + b_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} b_j - \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\
&\quad + \left(a_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} a_j + b_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} b_j - \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \right) + b_{k+1} \\
&= a_{k+1} + a_k + b_k + b_{k+1} + 2\sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} a_j + 2\sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j-1} b_j = \\
&= a_{k+1} + a_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j} a_j + b_{k+1} + b_k + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-j} b_j = \\
&= a_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} a_j + b_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} b_j .
\end{aligned}
$$

Demostración de la Propiedad 5:

Utilizando sucesivamente la Propiedad 3 podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m+h+1 \\ h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+h \\ h-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+h \\ h \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} m+h \\ h-1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+h-1 \\ h-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+h-1 \\ h-1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} m+h-1 \\ h-2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+h-2 \\ h-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+h-2 \\ h-2 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\begin{bmatrix} m+4 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} m+3 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} m+2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} m+1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + a_{m+1} - a_m
\end{aligned}
$$

donde cada primer miembro coincide con el primer sumando de la parte derecha de la línea anterior. Sumando y cancelando los términos iguales resulta

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m+h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+h+1 \\ h \end{bmatrix} - a_{m+1} + a_m.$$

La segunda opción se puede hacer pasando a complementarios en ambos miembros y teniendo en cuanta la Propiedad 2.

Demostración de la Propiedad 6.

Sea $\left[\begin{smallmatrix} m \\ h \end{smallmatrix}\right]$ el número combinatorio que ocupa el vértice inferior externo al rectángulo. Tenemos que sumar todos los números que están dentro del rectángulo, lo hacemos agrupando los paralelos a la diagonal externa de la derecha y son

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} h-1 \\ h-1 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} h \\ h-1 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} h+1 \\ h-1 \end{bmatrix} + \cdots + \\ &+ \begin{bmatrix} h-2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h-1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m-2 \\ h-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando la Propiedad 5 para cada una de estas líneas, la suma anterior es igual que

$$\begin{bmatrix} h \\ h-1 \end{bmatrix} - a_1 + a_0 + \begin{bmatrix} h+1 \\ h-1 \end{bmatrix} - a_2 + a_1 + \begin{bmatrix} h+2 \\ h-1 \end{bmatrix} - a_3 + a_2 + \cdots + \begin{bmatrix} m-1 \\ h-1 \end{bmatrix} - a_{m-h} + a_{m-h-1} =$$

y cancelando términos y volviendo a aplicar la Propiedad 5 a esta suma, en la que falta $\left[\begin{smallmatrix} h-1 \\ h-1 \end{smallmatrix}\right] = b_{h-1}$, resulta

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} h-1 \\ h-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ h-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h+1 \\ h-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h+2 \\ h-1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} m-1 \\ h-1 \end{bmatrix} + a_0 - a_{m-h} - \begin{bmatrix} h-1 \\ h-1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix} - b_h + b_{h-1} + a_0 - a_{m-h} - b_{h-1} = \begin{bmatrix} m \\ h \end{bmatrix} - b_h - a_{m-h} + a_0. \end{aligned}$$

Por tanto, la suma de todos los números combinatorios del rectángulo, aumentada en $b_h + a_{m-h} - a_0$ es igual al número combinatorio $\left[\begin{smallmatrix} m \\ h \end{smallmatrix}\right]$, situado en el vértice inferior externo al rectángulo. Sumando las líneas de la otra manera posible se obtiene el mismo resultado.

Demostración de la expresión del número combinatorio generalizado:

Puesto que estos números se han definido como suma de los contiguos de la fila anterior, bastará demostrar que con la expresión dada se cumple la igualdad

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix}.$$

Esto es equivalente a suponer que la fórmula es cierta hasta la fila m y demostrarlo para la fila $m+1$.

La parte izquierda vale

$$\sum_{k=0}^{m-n-1} \binom{n-1+k}{k} a_{m-n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-n-1+k}{k} b_{n-k} + \\ + \sum_{k=0}^{m-n-2} \binom{n+k}{k} a_{m-n-1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{m-n-2+k}{k} b_{n+1-k}$$

que es

$$= \sum_{k=0}^{m-n-1} \binom{n-1+k}{k} a_{m-n-k} + \sum_{k=0}^{m-n-2} \binom{n+k}{k} a_{m-n-1-k} + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-n-1+k}{k} b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{m-n-2+k}{k} b_{n+1-k}$$

haciendo $k = k' - 1$ en los sumatorios segundo y tercero, resulta

$$= \sum_{k=0}^{m-n-1} \binom{n-1+k}{k} a_{m-n-k} + \sum_{k'=1}^{m-n-1} \binom{n-1+k'}{k'-1} a_{m-n-k'} + \\ + \sum_{k'=1}^{n} \binom{m-n-2+k'}{k'} b_{n+1-k'} + \sum_{k=0}^{n} \binom{m-n-2+k}{k} b_{n+1-k}$$

y estos sumatorios pueden extenderse desde $k' = 0$ porque $\binom{n-1}{-1} = 0$ y $\binom{m-n-2}{-1} = 0$, luego es

$$= \sum_{k=0}^{m-n-1} \left[\binom{n-1+k}{k} + \binom{n-1+k}{k-1} \right] a_{m-n-k} + \\ + \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{m-n-2+k}{k-1} + \binom{m-n-2+k}{k} \right] b_{n+1-k}$$

y por tanto queda

$$= \sum_{k=0}^{m-n-1} \binom{n+k}{k} a_{m-n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{m-n-1+k}{k} b_{n+1-k} = \begin{bmatrix} m+1 \\ n+1 \end{bmatrix}.$$

6. Triángulo armónico

Por semejanza con el triángulo aritmético, o de Pascal, se estudió el triángulo armónico, en el que cada término se forma con diferencias en lugar de sumas, donde se eliminan las diagonales primera y última. El triángulo comienza con los números siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}$$

En este triángulo las diagonales extremas contienen los términos de la serie armónica, que es divergente. Las siguientes diagonales son todas convergentes, las segundas diagonales suman 1, ya que

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{30} + \cdots &= \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \tfrac{1}{4\cdot 5} + \tfrac{1}{5\cdot 6} + \cdots = \\
&= \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots = 1,
\end{aligned}$$

los términos de la tercera diagonal suman $\frac{1}{2}$, los de la siguiente $\frac{1}{3}$, etc.

Escribiendo como matrices estos triángulos, aritmético y armónico, quedan

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \cdots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\quad
\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \frac{1}{168} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & \frac{1}{280} & \cdots & \ddots \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & \frac{1}{280} & \cdots & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & &
\end{pmatrix}$$

En el aritmético cada término, excepto los de la primera fila y columna, es la suma del situado encima de él y el que tiene a su izquierda. En el armónico cada término es la diferencia entre el que está encima de él y el que está encima de él a su derecha.

7. Matrices de Toeplitz

Una matriz infinita de números reales o complejos es una disposición semejante a una matriz pero que no acaba nunca por la derecha y por abajo. Formalmente es un aplicación de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, es decir una disposición de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde todos los elementos a_{jk} pertenecen a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$.

La teoría de las matrices infinitas no es una parte del Álgebra lineal, sino del Análisis matemático. La razón es que para multiplicar dos matrices que den como resultado otra matriz, $AB = C = (c_{jk})$, es necesario que los productos de cada de una de las filas de A por cada una de las columnas de B den como resultado un número c_{jk}, real o complejo, lo que implica que la serie formada por estos productos, $\sum_{h=1}^{\infty} a_{jh}b_{hk}$, sea convergente. En cuanto uno de esos productos no lo sea la matriz C no existe, porque sus elementos no son números, y el producto de esas matrices no está definido.

Otro asunto importante a tener en cuenta en el producto de matrices infinitas es que la propiedad asociativa no se cumple en general, es decir $A(BC) \neq (AB)C$, además de que tampoco se cumple la propiedad conmutativa como ocurre en las matrices finitas.

Si A es una matriz infinita, su traspuesta conjugada se representa por A^H. Una matriz es hermitiana si coincide con su traspuesta conjuda, es decir si $A^H = A$. En el caso de que sea una matriz real, hermitiana es lo mismo que decir simétrica, es decir $A^t = A$.

Si A es una matriz infinita y hermitiana, se dice que es definida positiva, de forma abreviada *HPD*, si todos los determinantes de las secciones principales son positivos, es decir, $|A_n| > 0$ para todo $n \geq 1$, donde A_n es la matriz truncada de tamaño $n \times n$.

Toda matriz infinita *HPD, A*, define un producto escalar $< \cdot, \cdot >$ en el espacio de todos los polinomios con coeficientes complejos dado por la siguiente forma: si $p(z) = \sum_{k=0}^{n} v_k z^k$ y $q(z) = \sum_{k=0}^{m} w_k z^k$, entonces

$$< p(z), q(z) >= vA\overline{w}$$

siendo $v = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n, 0, 0, \ldots)$, $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots, w_m, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$, donde c_{00} es el espacio de todos las sucesiones complejas con solo una cantidad finita de elementos no nulos.

Una clase importante de matrices *HPD* con aquellas que son matrices de momentos con respecto a una medida positiva μ sobre los subconjuntos de Borel del plano complejo. Suponemos que el soporte de la medida, $\text{supp}(\mu)$ es un compacto y contiene infinitos puntos. Es decir, matrices *HPD*, $M = (c_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$, tales que existe una medida μ con soporte infinito en $\mathbb{C}$ y momentos finitos para todos $j, k \geq 0$, dados por

$$c_{jk} = \int_{\text{supp}(\mu)} z^j \overline{z}^k d\mu.$$

En las matrices de momentos es habitual utilizar notación contraria fila-columna y comenzar la numeración en $[0, 0]$, es decir

$$M = (c_{jk})_{j,k=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{10} & c_{20} & \cdots \\ c_{01} & c_{11} & c_{21} & \cdots \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

con el fin de que los momentos reales aparezcan en la primera fila.

Una matriz infinita se dice que es de Toeplitz si sus diagonales son constantes, es decir si es de la forma

$$T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1' & c_2' & c_3' & \ddots \\ c_1 & c_0 & c_1' & c_2' & \ddots \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_1' & \ddots \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Una matriz de Toeplitz infinita se dice que es hermitiana si coincide con su traspuesta conjugada. En el caso en que sea una matriz real, debe ser simétrica. Se dice que es definida positiva si los determinantes de sus secciones principales son positivos.

Es bien conocido que si partimos de una medida positiva sobre la circunferencia unidad, la matriz de momentos correspondiente es una matriz de Toeplitz. La demostración de este hecho es simple. Si $\mu(z)$ es una medida positiva definida en la circunferencia unidad, como $z\overline{z} = 1$, resulta que los momentos verifican que

$$c_{j+m,k+m} = \int\limits_{|z|=1} z^{j+m}\overline{z}^{k+m} d\mu(z) = \int\limits_{|z|=1} z^j \overline{z}^k (z\overline{z})^m d\mu(z) = \int\limits_{|z|=1} z^j \overline{z}^k d\mu(z) = c_{jk},$$

para todos $j, k, m \in \mathbb{Z}^+$. Por tanto la matriz es de Toeplitz. Es además hermitiana, ya que

$$\overline{c_{jk}} = \int\limits_{|z|=1} \overline{z^j \overline{z}^k} d\mu(z) = \int\limits_{|z|=1} z^k \overline{z}^j d\mu(z) = c_{kj}.$$

La demostración de que es definida positiva es consecuencia del *teorema de Carathéodory-Toeplitz*, véase página 56 de [5] o página 27 de [7]. Este teorema dice que c_{jk} *son momentos de una medida no trivial en la circunferencia unidad si y sólo si la matriz* T *es Toeplitz y definida positiva.*

Por tanto, si partimos de una matriz de Toeplitz y *HPD*, $T = (t_{ij})$ el teorema garantiza que existe una medida definida sobre la circunferencia unidad centrada en el origen cuyos momentos son los elementos de la matriz.

8. Matrices de Pascal

Aunque Tartaglia presentara su triángulo en una disposición rectangular y Pascal en una disposición cuadrada, el concepto de matriz no existía todavía. En el trabajo de Brawer y Pirovino, [2], se escribe el triángulo como matriz finita de orden n, en forma de matriz triangular inferior, P_1, y en forma de matriz completa, P_2, y se estudian algunas de sus propiedades. Si escribimos estas matrices infinitas, vemos inmediatamente que se verifica $P_2 = P_1 P_1^t$:

$$P_1 P_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = P_2,$$

lo que nos indica que $P_1 P_1^t$ es la descomposición de Cholesky de P_2.

Propiedades de la matriz de Pascal clásica

En la matriz de Pascal clásica, P_2, la forma de expresar las propiedades del triángulo aritmético es ligeramente diferente al considerar filas y columnas. Llamando

$$P = P_2 = (p_{jk})_{j,k=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \cdots \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \cdots \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

como es $p_{jk} = \binom{j+k}{k}$, las propiedades vistas para el triángulo aritmético en la Sección 2 son ahora, para $j, k = 0, 1, 2, ...$, las siguientes:

1. Elementos de la primera fila y primera columna:

$$p_{0k} = 1, \qquad p_{j0} = 1,$$

ya que

$$p_{0k} = \binom{k}{k} = 1, \quad p_{j0} = \binom{j}{0} = 1.$$

2. Elementos simétricos:

$$p_{jk} = p_{kj},$$

ya que

$$p_{jk} = \binom{j+k}{k} = \binom{k+j}{j} = p_{kj}.$$

3. Suma de elementos consecutivos:

$$p_{jk} + p_{j-1,k+1} = p_{j,k+1},$$

ya que

$$p_{jk} + p_{j-1,k+1} = \binom{j+k}{k} + \binom{j-1+k+1}{k+1} = \binom{j+k}{k} + \binom{j+k}{k+1} = \binom{j+k+1}{k+1} = p_{j,k+1}.$$

4. Suma de una diagonal secundaria completa:

$$p_{k0} + p_{k-1,1} + p_{k-2,2} + \cdots + p_{1,k-1} + p_{0k} = 2^k,$$

ya que la parte izquierda es

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Ejemplo 15. En la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \cdots \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \cdots \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

se observa de forma inmediata que

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3 = 8.$$

5. Suma de una fila hasta un elemento concreto:

$$p_{j0} + p_{j1} + p_{j2} + \cdots + p_{jh} = p_{j+1,h},$$

ya que la parte izquierda vale

$$\binom{j}{0} + \binom{j+1}{1} + \cdots + \binom{j+h}{h} = \binom{j+h+1}{h} = p_{j+1,h},$$

y suma de una columna hasta un elemento:

$$p_{0k} + p_{1k} + p_{2k} + \cdots + p_{hk} = p_{h,k+1},$$

ya que la parte izquierda vale

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+h}{k} = \binom{k+h+1}{k+1} = p_{h,k+1}.$$

Ejemplo 16. En la matriz

$$\begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \binom{4}{4} & \binom{5}{5} & \cdots \\
\binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \binom{5}{4} & \binom{6}{4} & \cdots \\
\binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \binom{6}{4} & \binom{7}{3} & \cdots \\
\binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \binom{7}{4} & \binom{8}{4} & \cdots \\
\binom{4}{0} & \binom{5}{1} & \binom{6}{2} & \binom{7}{3} & \binom{8}{4} & \binom{9}{5} & \cdots \\
\binom{5}{0} & \binom{6}{1} & \binom{7}{2} & \binom{8}{3} & \binom{9}{4} & \binom{10}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

observamos que

$$\binom{4}{0} + \binom{5}{1} + \binom{6}{2} + \binom{7}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$$

y que

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{7}{4}.$$

El resultado es el número que está en la fila siguiente justo debajo, o en la columna siguiente justo a la derecha.

6. Propiedad del rectángulo: La suma de todos los términos comprendidos en las j primeras filas y k primeras columnas más una unidad es el elemento $p_{j+1,k+1} = \binom{j+k+2}{k+1}$.

Ejemplo 17. En la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \binom{4}{4} & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \binom{5}{4} & \cdots \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \binom{6}{4} & \cdots \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \binom{7}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

se observa que

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{2}+\binom{3}{3}+\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}+\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+1=\binom{7}{4}.$$

Vamos a generalizar la matriz de Pascal partiendo de dos sucesiones cualesquiera de números reales o complejos $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, con $a_0 = b_0$, formando la siguiente *matriz de Pascal general*

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ a_1 & a_1+b_1 & a_1+b_1+b_2 & a_1+b_1+b_2+b_3 & \cdots \\ a_2 & a_1+a_2+b_1 & 2a_1+a_2+2b_1+b_2 & \square & \cdots \\ a_3 & a_1+a_2+a_3+b_1 & \square & \square & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde, excepto la primera fila y columna, cada elemento está formado por la suma del que tiene a su izquierda y el que tiene encima. En general esta matriz no es simétrica salvo que las dos sucesiones sean la misma.

Propiedades de la matriz de Pascal general

Llamando $M = (m_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ a esta matriz general, las propiedades estudiadas para números combinatorios generalizados dan lugar a las siguientes propiedades, que no es necesario demostrar porque se obtienen de traducir aquellas a la posición en la matriz. La matriz es

$$M = (m_{jk})_{j,k=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & \cdots \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

y como es $m_{jk} = \begin{bmatrix} j+k \\ k \end{bmatrix}$, para $j, k = 0, 1, 2, ...$, las propiedades de los números combinatorios generalizados, vistos en la Sección 5, se traducen ahora en estas propiedades.

1. Elementos de la primera fila y primera columna:

$$m_{0k} = b_k, \qquad m_{j,0} = a_j.$$

2. Elementos simétricos:

$$m_{jk}(a_j, b_k) = m_{kj}(a_k, b_j).$$

3. Suma de elementos consecutivos:

$$m_{j,k+1} + m_{j+1,k} = m_{j+1,k+1}.$$

4. Suma de elementos de una diagonal secundaria completa:

$$m_{k0} + m_{k-1,1} + m_{k-2,2} + \cdots + m_{1,k-1} + m_{0k} = a_k + \sum_{h=0}^{k-1} 2^{k-h-1} a_h + b_k + \sum_{h=0}^{k-1} 2^{k-h-1} b_h,$$

ya que la expresión del lado izquierdo es

$$\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$$

y basta utilizar la Propiedad 4 de la página 20.

Ejemplo 18. Con la siguiente figura

$$\begin{pmatrix} \genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3} & \cdots \\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{3} & \cdots \\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{3} & \cdots \\ \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

se observa que

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{0} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{2} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3} = a_3 + \sum_{h=0}^{2} 2^{3-h-1} a_h + b_3 + \sum_{h=0}^{2} 2^{3-h-1}.$$

5. Suma de una fila hasta un elemento concreto

$$m_{j0} + m_{j1} + m_{j2} + \cdots + m_{jh} = m_{j+1,h} - a_{j+1} + a_j,$$

ya que la parte izquierda de la igualdad vale

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{j}{0} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j+1}{1} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j+2}{2} + \cdots + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j+h}{h} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{j+h+1}{h} - a_{j+1} + a_j,$$

y suma de una columna hasta un elemento:

$$m_{kk} + m_{k+1,k} + m_{k+2,k} + \cdots + m_{k+h,k} = m_{k+h+1,k+1} - b_{k+1} + b_k,$$

por análoga razón.

Ejemplo 19. Esta propiedad es más clara visualmente a partir de la matriz

$$\begin{pmatrix}
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{5} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{5} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{5} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{8}{5} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{8}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{9}{5} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{8}{3} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{9}{4} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{10}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

donde se observa la suma de la fila

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{0} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{1} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{2} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{3} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{8}{4} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{9}{4} - \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{0} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{0}$$

y la suma de la columna

$$\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{3} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{3} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{3} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{4} - \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{4} + \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3}.$$

6. Propiedad del rectángulo: La suma de todos los términos comprendidos en las j primeras filas y k primeras columnas más a_{j+1}, más b_{k+1}, menos a_0 es el elemento $m_{j+1,k+1}$.

Ejemplo 20. Según esto, en la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix}
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{3} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{1}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{3} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{2}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{3} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{3}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{3} & \cdots \\
\genfrac{[}{]}{0pt}{}{4}{0} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{5}{1} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{6}{2} & \genfrac{[}{]}{0pt}{}{7}{3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

la suma de todos los térmimos colocados en el rectángulo es

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}-a_4-b_3+a_0.$$

La expresión general de los términos de la matriz $M=(m_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ está dada por la fórmula

$$m_{jk}=\sum_{h=0}^{j-2}\binom{k-2+h}{h}a_{j-1-h}+\sum_{h=0}^{k-2}\binom{j-2+h}{h}b_{k-1-h}+a_0\delta_{j1}\delta_{k1},\quad j,k\geq 1,$$

donde δ_{pq} es la delta de Kronecker. La demostración puede encontrarse en [9].

En algunos casos la matriz puede ser hermitiana, debería cumplir que fuese $M^H=M$. En otros puede ser *HPD*, es decir hermitiana y con determinantes positivos para todas sus secciones principales, $|M_n|>0$ para todo $n\geq 1$. Podría ser incluso una matriz de momentos correspondiente a una medida μ sobre el plano complejo.

La matriz de Pascal, clásica, es la matriz de momentos correspondiente a la medida uniforme definida sobre la circunferencia de radio 1 centrada en el punto $(1,0)$. La medida es $\mu(z)=\frac{1}{2\pi}$ para todo $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z-1|=1$.

9. Relación entre matrices de Pascal y matrices de Toeplitz

Si tenemos una distribución en la recta real y la desplazamos con respecto al origen, la matriz de momentos continúa siendo una matriz de Hankel y no hay cambios esenciales en el problema de los momentos. En el caso complejo, por ejemplo en la circunferencia unidad, es suficiente mover el centro de la circunferencia soporte a otro punto para que la matriz de momentos deje de ser una matriz de Toeplitz, lo mismo que si hacemos una homotecia con centro en el origen y radio $r\neq 1$.

Es un asunto interesante conocer la matriz de momentos que aparece tras una transformación del soporte mediante una transformación lineal de semejanza, es decir mediante la aplicación compleja $\varphi(z)=\alpha z+\beta$, con $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, que transforma un soporte γ en un soporte γ^*. La matriz resultante está dada por el siguiente Lema cuya demostración puede verse en [8].

Lema *Si $M_n = (c_{jk})_{j,k=0}^{n-1}$ es la sección n-ésima de la matriz de momentos de una medida μ con soporte γ en $\mathbb{C}$ y consideramos la transformación lineal de semejanza $\varphi(z) = \alpha z + \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, que transforma γ en $\gamma^* = \{\alpha z + \beta : z \in \gamma\}$, con $d\mu^*(u) = d\mu(\alpha z + \beta)$, entonces la matriz de momentos de la medida $\mu \circ \varphi^{-1}$ está dada por $M_n^{\varphi} = A_n^H M_n A_n$, donde A_n es la sección n-ésima de*

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}\alpha^0\beta^0 & \binom{1}{0}\alpha^0\beta^1 & \binom{2}{0}\alpha^0\beta^2 & \binom{3}{0}\alpha^0\beta^3 & \cdots \\ 0 & \binom{1}{1}\alpha^1\beta^0 & \binom{2}{1}\alpha^1\beta^1 & \binom{3}{1}\alpha^1\beta^2 & \cdots \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}\alpha^2\beta^0 & \binom{3}{2}\alpha^2\beta^1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3}\alpha^3\beta^0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde A_n^H denota la matriz traspuesta conjugada de A_n.

Ejemplo 21. Si consideramos la medida normalizada de Lebesgue, es decir $c_{00} = 1$, sobre la circunferencia unidad, se tienen los momentos

$$c_{jk} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [e^{i\theta}]^j [e^{-i\theta}]^k d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)} d\theta = \delta_{jk},$$

siendo δ_{jk} la delta de Kronecker. En este caso la matriz de momentos es la matriz unidad, I, que obviamente es una matriz de Toeplitz.

Si tomamos $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, transformamos el conjunto de puntos por medio de $T(z) = z + 1$, luego

$$T(\{z : |z| = 1\}) = \{z + 1 : |z| = 1\} = \{u : |u - 1| = 1\},$$

y resulta la circunferencia unidad centrada en el punto $(1, 0)$ con la medida de Lebesgue. La matriz de momentos que resulta es la llamada *matriz de Pascal.*

Por ejemplo, para $n = 5$ tenemos

$$M_5^{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

En [9] está demostrado el siguiente teorema:

Teorema *Si T_n es una matriz de Toeplitz, entonces*

$$M_n = A_n(1,-1)^{-1} T_n A_n(1,-1)^{-1}$$

es una matriz de Pascal, en el sentido general definido en la página 31, y recíprocamente si M es una matriz de Pascal, entonces la matriz

$$T_n = A_n^t(1,-1) M_n A_n(1,-1)$$

es una matriz de Toeplitz.

La demostración de esta segunda parte no es sencilla, pero la demostración de la primera es más complicada, ambas se basan en cálculos con sumatorios y números combinatorios. En este caso la matriz A_n es

$$A_n(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & \binom{n-1}{n-1}(-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdots & \binom{n-1}{n-2}(-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \cdots & \binom{n-1}{n-3}(-1)^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{n-4}(-1)^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{0} \end{pmatrix}$$

y su inversa es

$$A_n(1,-1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdots & \binom{n-1}{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como las matrices $A_n(1,-1)$ y $A_n(1,-1)^{-1}$ son triangulares y sus determinantes valen 1, es evidente que los determinantes de M_n y de T_n coinciden, por lo que si una de ellas es definida positiva, la otra también lo es. Si una de ellas es hermitiana, la otra también lo es. Todo ello sin necesidad de que exista medida, es decir como relación entre ellas puramente algebraica.

Además, si M es hermitana definida positiva es de momentos, ya que la matriz de Toeplitz será hermitiana definida positiva y por tanto solución de un problema de momentos correspondiente a una medida sobre la circunferencia unidad, así que M será la matriz de momentos correspondiente a al traslación del soporte de la medida asociada a T al punto $z = 1$.

La matriz de Pascal M está determinada por dos sucesiones cualesquiera de números reales o complejos $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, con $a_0 = b_0$, que podemos considerar como una sucesión bilátera, tomando $b_j = a_{-j}$ para $j = 1, 2, \ldots$ en la forma

$$\overline{a} = (\ldots, a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots).$$

Del mismo modo la matriz de Toeplitz T está determinada por dos sucesiones que pueden considerarse como una sucesión bilátera

$$\overline{c} = (\ldots, c_2, c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, \cdots).$$

Así que la relación entre la matriz de Pascal y la matriz de Toeplitz correspondiente se traduce en una relación entre sucesiones biláteras

$$\overline{a} = (\ldots, a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \cdots) \longleftrightarrow (\ldots, c_2, c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, \cdots) = \overline{c}$$

que se llama *transformación binomial* y permite pasar de una a la otra por medio de la relación matricial

$$T_n(\overline{c}) = A_n(1,-1)^t M_n(\overline{a}) A_n(1,-1).$$

Ejemplo 22. Algunas sucesiones biláteras y sus transformaciones son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\overline{a} &= (\ldots, 1, 1, 1, \boxed{1}, 1, 1, 1, \cdots) & \longleftrightarrow && (\ldots, 0, 0, 0, \boxed{1}, 0, 0, 0, \cdots) = \overline{c} \\
\overline{a} &= (\ldots, 3, 2, 1, \boxed{0}, 1, 2, 3, \cdots) & \longleftrightarrow && (\ldots, 0, 0, 1, \boxed{0}, 1, 0, 0, \cdots) = \overline{c} \\
\overline{a} &= (\ldots, 4, 3, 2, \boxed{1}, 2, 3, 4, \cdots) & \longleftrightarrow && (\ldots, 0, 0, 1, \boxed{1}, 1, 0, 0, \cdots) = \overline{c} \\
\overline{a} &= (\ldots, 5, 4, 3, \boxed{2}, 3, 4, 5, \cdots) & \longleftrightarrow && (\ldots, 0, 0, 1, \boxed{2}, 1, 0, 0, \cdots) = \overline{c} \\
\overline{a} &= (\ldots, 6, 5, 4, \boxed{3}, 4, 5, 6, \cdots) & \longleftrightarrow && (\ldots, 0, 0, 1, \boxed{3}, 1, 0, 0, \cdots) = \overline{c} \\
\overline{a} &= (\ldots, -2, -1, 0, \boxed{1}, 2, 3, 4, \cdots) & \longleftrightarrow && (\ldots, 0, 0, -1, \boxed{1}, 1, 0, 0, \cdots) = \overline{c} \\
\overline{a} &= (\ldots, 7, 5, 3, \boxed{1}, 3, 5, 7, \cdots) & \longleftrightarrow && (\ldots, 0, 0, 2, \boxed{1}, 2, 0, 0, \cdots) = \overline{c}
\end{aligned}
$$

donde se ha recuadrado el elemento central. Obsérvese que para esta relación no es necesario que M o T sean definidas positivas, ni que sean hermitianas o simétricas.

Agradecimiento

Los autores quieren expresar su agradecimiento a la profesora Elena Castiñeira Holgado, del departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información de la Universidad Politécnica de Madrid, por sus valiosos comentarios y sugerencias, que han contribuido notablemente a una mejor versión de este trabajo.

Bibliografía

[1] Boyer C.B. Historia de la Matemática. *Ed. Alianza Universidad Textos.* Madrid, 1987.

[2] Brawer C.B, Pirovino M. The lineal algebra of the Pascal matrix, *Linear Algebra Appl.* 1992, **174**: 13-23.

[3] Edwards A.W.F. Pascal's Aritmethic Triangle: The Story of a Mathematical Idea. *Charles Griffin,* London, 1987 and *Johns Hopkins Univ. Press,* Baltimore, 2002.

[4] García Merayo F. Pascal. Un genio precoz. *Ed. Nivola.* Madrid, 2007.

[5] Grenander U, Szegö G. Toeplitz forms and their applications. *Chelsea Publishing Company.* New York, 1955.

[6] Rey Pastor J, Babini J. Historia de la Matemática. *Ed. Espasa-Calpe.* Buenos Aires, 1951, y *Ed. Gedisa* (2 tomos). Barcelona, 1984 y 1985.

[7] Simon B. Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory. *American Mathematical Society.* Rhode Island, 2005.

[8] Tomeo V, Torrano E. Matrices y polinomios ortogonales. Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos. Universidad Complutense de Madrid, CT 01-2019, Madrid, 2019.

[9] Tomeo V, Torrano E. Pascal matrices and Toeplitz matrices: Relations. *Computational and Mathematical Methods,* 2020;2:e1119.

[10] Uspenski V.A. Triángulo de Pascal. *Ed Mir*, Moscú, 1978.

Cuadernos de Trabajo
Facultad de Estudios Estadísticos

CT01/2014 **Estimación de la tasa de retorno de la carta del censa de los Estados Unidos a través del modelo de regresión lineal y técnicas de predicción inteligentes.**
José Luis Jiménez-Moro y Javier Portela García Miguel

CT03/2013 **Provisión de siniestros de incapacidad temporal utilizando análisis de supervivencia.**
Ana Crespo Palacios y Magdalena Ferrán Aranaz

CT02/2013 **Consumer need for touch and Multichannel Purchasing Behaviour.**
R. Manzano, M. Ferrán y D. Gavilán

CT01/2013 **Un método gráfico de comparación de series históricas en el mercado bursátil.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2012 **Calculando la matriz de covarianzas con la estructura de una red Bayesiana Gaussiana**
Miguel A. Gómez Villegas y Rosario Susi

CT02/2012 **What's new and useful about chaos in economic science.**
Andrés Fernández Díaz, Lorenzo Escot and Pilar Grau-Carles

CT01/2012 **A social capital index**
Enrique González-Arangüena, Anna Khmelnitskaya, Conrado Manuel, Mónica del Pozo

CT04/2011 **La metodología del haz de rectas para la comparación de series temporales.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2011 **Game Theory and Centrality in Directed Social Networks**
Mónica del Pozo, Conrado Manuel, Enrique González-Arangüena y Guillermo Owen.

CT02/2011 **Sondeo de intención de voto en las elecciones a Rector de la Universidad Complutense de Madrid 2011**
L.Escot, E. Ortega Castelló y L. Fernández Franco (coords)

CT01/2011 **Juegos y Experimentos Didácticos de Estadística y Probabilidad**
G. Cabrera Gómez y Mª.J. Pons Bordería

CT04/2010 **Medio siglo de estadísticas en el sector de la construcción residencial**
M. Ferrán Aranaz

CT03/2010 **Sensitivity to hyperprior parameters in Gaussian Bayesian networks.**
M.A. Gómez-Villegas, P. Main, H. Navarro y R. Susi

CT02/2010 **Las políticas de conciliación de la vida familiar y laboral desde la perspectiva del empleador. Problemas y ventajas para la empresa.**
R. Albert, L. Escot, J.A. Fernández Cornejo y M.T. Palomo

CT01/2010 **Propiedades exóticas de los determinantes**
Venancio Tomeo Perucha

CT05/2009 **La predisposición de las estudiantes universitarias de la Comunidad de Madrid a auto-limitarse profesionalmente en el futuro por razones de conciliación**
R. Albert, L. Escot y J.A. Fernández Cornejo

CT04/2009 **A Probabilistic Position Value**
A. Ghintran, E. González–Arangüena y C. Manuel

CT03/2009 **Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores**
A. Pajares García y V. Tomeo Perucha

CT02/2009 **La disposición entre los hombres españoles a tomarse el permiso por nacimiento. ¿Influyen en ello las estrategias de conciliación de las empresas?**
L. Escot, J.A. Fernández-Cornejo, C. Lafuente y C. Poza

CT01/2009 **Perturbing the structure in Gaussian Bayesian networks**
R. Susi, H. Navarro, P. Main y M.A. Gómez-Villegas

CT09/2008 **Un experimento de campo para analizar la discriminación contra la mujer en los procesos de selección de personal**
L. Escot, J.A. Fernández Cornejo, R. Albert y M.O. Samam

CT08/2008 **Laboratorio de Programación. Manual de Mooshak para el alumno**
D. I. de Basilio y Vildósola, M. González Cuñado y C. Pareja Flores

CT07/2008 **Factores de protección y riesgo de infidelidad en la banca comercial**
J. Mª Santiago Merino

CT06/2008 **Multinationals and foreign direct investment: Main theoretical strands and empirical effects**
María C. Latorre

CT05/2008 **On the Asymptotic Distribution of Cook's distance in Logistic Regression Models**
Nirian Martín y and Leandro Pardo

CT04/2008 **La innovación tecnológica desde el marco del capital intelectual**
Miriam Delgado Verde, José Emilio Navas López, Gregorio Martín de Castro y Pedro López Sáez

CT03/2008 **Análisis del comportamiento de los indecisos en procesos electorales: propuesta de investigación funcional predictivo-normativa**
J. Mª Santiago Merino

CT02/2008 **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi

CT01/2008 **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González–Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den B

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID