CUADERNOS DE TRABAJO

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

La princesa elige prometido y otros ejercicios de probabilidad

Venancio Tomeo Perucha

Cuaderno de Trabajo número 02/2020

UCM

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Facultad para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Facultad www.ucm.es/BUCM/est/, en la página del Repositorio Institucional UCM E-Prints Complutense y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO:

Biblioteca de la Facultad de Estudios Estadísticos

Universidad Complutense de Madrid

Av. Puerta de Hierro, S/N

28040 Madrid

Tlf. 913944035

buc_est@buc.ucm.es

ISSN: 2341-2550

La princesa elige prometido

y otros ejercicios de probabilidad

Venancio Tomeo

Dpto. Álgebra, Geometría y Topología
Facultad Estudios Estadísticos, UCM
tomeo@ucm.es

19 de noviembre de 2020

Resumen:
En este trabajo se estudian diez ejercicios de probabilidad. Se comienza con el problema de encontrar una estrategia para que la princesa elija al mejor de sus pretendientes, supuestas varias condiciones. A continuación se estudian las estrategias para el juego de las siete y media y el juego del blackjack, por su semejanza con el problema de la princesa en cuanto a utilizar la mejor estrategia posible. Se completa el trabajo con otros ejercicios de probabilidad que tienen tratamientos similares a los anteriores.

Palabras clave
Probabilidad, regla de Laplace, probabilidad condicionada, combinatoria, ecuaciones diofánticas, integral de Riemann, probabilidad total, fórmula de Bayes.

Contenido

Sobre el título

Algunos ejercicios, artículos o libros interesantes lo son menos porque no tienen un título que llame la atención. Es necesario poner un nombre destacado a aquello que queremos que sea recordado y nombrado por los lectores. Esa es una de las razones para poner ese título al primer ejercicio de este cuaderno. Otra es que mientras el autor redactaba este primer ejercicio, estaba leyendo una vez más la novela Ana Karenina y, en ella, la princesa Kitty va a elegir a su prometido de entre los pretendientes que le declaren su amor y han estado recientemente cortejando a la joven princesa.

La novela narra la interesante historia de Ana y el conde Wronsky en la Rusia de mediados del siglo XIX. Pero el autor describe a la vez una segunda historia paralela, que trata de la relación entre Levin y la princesa Kitty. Levin es un noble terrateniente que vive en el campo y en este personaje plasma Leon Tolstoi su personalidad, sus inquietudes y sus dudas en todos los aspectos sociales, económicos y religiosos, que son descritos con todo detalle. También las cualidades de su esposa, su belleza y sus inquitudes, están más o menos reflejadas en la princesa Kitty. En este sentido es una obra autobiográfica en que la segunda historia puede resultar al lector tan interesante como la primera.

Cuando la princesita cumple la mayoría de edad, su familia da una fiesta para que los pretendientes que la han estado galanteando en los últimos meses tengan la oportunidad de declararle su amor. Así que, según la costumbre de la época, se irán sentando al lado de ella y confesando sus deseos de ser su prometido y luego su marido. Si el pretendiente es rechazado, será otro el que se acerque a probar suerte. Si es aceptado, los padres darán la noticia a los asistentes a la fiesta y los demás pretendientes callarán sus intenciones.

Esto plantea un interesante problema matemático: ¿cómo hacer la mejor elección posible? En el caso concreto de Kitty, por su condición de princesa, solo había dos posibles pretendientes y al ser rechazado el primero ocurrió que el segundo, que era un altivo militar que no pensaba en el matrimonio, se abstuvo de postularse como pretendiente. La princesa cayó enferma y los padres muy contrariados. En Rusia en esa época, muchas familias eran nobles y tenían títulos de príncipe, conde o barón. Los integrantes de la famila directa del zar tenían el título de Gran Duque. Era lógico que la familia de la princesa quisiera para su hija un marido noble, y esa era la causa de que solo hubiese dos pretendientes. Se supone que entre los campesinos los pretendientes de las jóvenes casaderas se pudiesen contar por docenas al no imponer la condición de la nobleza.

Así que planteamos el ejercicio matemático de forma que n pretendientes se van acercando a la princesa, en un orden aleatorio, para declarar su amor y ella los va rechazando hasta aceptar a uno. Los restantes callarán sobre sus intenciones. La pregunta en cuestión es: ¿qué táctica debe usar la princesa para hacer la mejor elección posible? En el caso de la princesa Kitty las hipótesis del problema fallaron porque el segundo pretendiente no cumplió con lo previsto. Descartemos esa posibilidad en el ejercicio.

Debemos suponer que la princesa ya tiene asignada una calificación provisional a cada uno de sus pretendientes en razón de su aspecto físico, su comportamiento social y los estudios realizados. Solo falta conocer los datos económicos del aspirante, así que suponemos que cada uno le dirá algo así como "Si me aceptas como prometido, sepas que dispongo de unos bienes y unas rentas que tienen un valor de tantos miles de rublos". La princesa calculará rápidamente la calificación final y le rechazará o aceptará según esa calificación total.

1. La princesa elige prometido

Una princesa va a ir escuchando las declaraciones de sus n pretendientes, de forma que si uno es rechazado el siguiente formulará su petición y, si uno es aceptado, los padres anunciarán la noticia y los restantes pretendientes se retiran de la idea.

¿Cuál es la táctica que debe emplear la princesa para conseguir el mejor prometido? Con esa táctica, ¿cuál es la probabilidad de conseguir el mejor candidato?

¿Y cuál es la probabilidad de que al final la princesa se quede con un pretendiente peor que todos los rechazados? Esto sería malo para la princesa y su familia y tendrían que pensar en romper el compromiso o en el divorcio.

Resolución

La mejor estrategia a seguir es rechazar un cierto número de pretendientes y luego aceptar al primero que supere a todos los rechazados. Demostraremos que de ese modo la probabilidad de elegir al mejor es máxima.

Como punto de partida, vamos a suponer que la princesa tiene tres o cuatro candidatos que van a ir postulándose uno tras otro en un orden aleatorio, estos casos se estudian de una forma descriptiva, que es útil para después estudiar el caso general.

Caso $n = 3$

En el caso de tres candidatos, si la princesa rechazase a los dos primeros, tendría que aceptar al tercero, que podría ser al azar cualquiera de ellos, así que la probabilidad de elegir al mejor sería $1/3$. Poco interesante, hay que mejorar esa probabilidad. Supongamos que rechaza al primero y acepta al primero de los otros dos que supere al rechazado. Sean 1, 2 y 3 las puntuaciones del peor, el intermedio y el mejor, respectivamente. Podemos analizar el resultado con la siguiente tabla:

orden	se rechaza	se elige
123	1	2
132	1	3
213	2	3
231	2	3
312	3	2
321	3	1

Así que la probabilidad de elegir al mejor es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$, la probabilidad de elegir al intermedio es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y la probabiliadad de elegir al peor es $\frac{1}{6}\cdot$ Por supuesto que esta estrategia es mejor que la de elegir uno al azar.

En cuanto a la última pregunta, vemos que la princesa elegirá finalmente un pretendiente peor que todos los rechazados en los dos últimos casos, es decir con una probabilidad de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}\cdot$

Caso $n = 4$:

Supongamos ahora que son cuatro los pretendientes. No tiene sentido rechazar a tres porque se tendría que quedar con el último, que sería al azar cualquiera de ellos y la probabilidad de elegir al mejor sería $1/4$. Se trata de mejorar esa probabilidad.

Podría escuchar a uno y elegir entre los otros al primero que le supere, o escuchar a los dos primeros y elegir al primero que les supere. Así que podemos hacer una tabla con dos casos, $k = 1$ y $k = 2$, siendo k el número de pretendientes rechazados. El orden en que se presentan los cuatro pretendientes tiene ahora $4! = 24$ casos.

posibles	$k = 1$ se elige	$k = 2$ se elige
1234	2	3
1243	2	4
1324	3	4
1342	3	4
1423	4	3
1432	4	2
2134	3	3
2143	4	4
2314	3	4
2341	3	4
2413	4	3
2431	4	1
3124	4	4
3142	4	4
3214	4	4
3241	4	4
3412	4	2
3421	4	1
4123	3	3
4132	2	2
4213	3	3
4231	1	1
4312	2	2
4321	1	1

Tenemos que en el caso $k = 1$ es

$$P(\textit{elegir el mejor}) = \frac{11}{24}\cdot$$

En el caso $k = 2$ es

$$P(\textit{elegir el mejor}) = \frac{10}{24}\cdot$$

Este último número es inferior, luego el caso $k = 2$ es peor que el $k = 1$. Es decir, rechazar a dos de los cuatro, que es rechazar al 50% de los pretendientes, es peor que rechazar a uno de los cuatro, que es rechazar al 25% de los candidatos.

Por otra parte, respecto a la última cuestión, contando los casos en la tabla, se tiene que para $k = 1$ es

$$P(\textit{elegir uno peor que todos los rechazados}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

ya que ocurre en los seis últimos casos, y para $k = 2$ es también

$$P(\textit{elegir uno peor que todos los rechazados}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

ya que ocurre en los casos 2431, 3412, 3421, 4231, 4312 y 4321.

Caso general:

Estudiemos el caso general. Son n pretendientes y se rechazan k inicialmente, con $0 < k < n - 1$. Independientemente del valor de n, con la estrategia óptima, la probabilidad de elegir al mejor nunca baja del valor 0,367 869. Este número es $1/e$. Por ejemplo, para $n = 9$ la estrategia consiste en rechazar $k = 3$ y elegir al primer candidato que supere a todos los rechazados, se elegirá al mejor en el 40% de los casos.

Consideramos los sucesos:

$$\begin{aligned} A_i &= \textit{"el candidato i es el elegido"}, \\ B_i &= \textit{"el candidato i es el mejor"}, \end{aligned}$$

El orden de los candidatos es aleatorio, por la regla de Laplace, tenemos que

$$P(B_i) = \frac{1}{n}\cdot$$

Suponemos n fijo y conocido. Rechazando los k primeros pretendientes, la probabilidad de conseguir el mejor, dependerá de k, y utilizando probabilidad condicionada, es

$$P(k) = P(\textit{el elegido es el mejor}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i/B_i) \cdot P(B_i).$$

La probabilidad $P(A_i/B_i)$ es nula si el mejor candidato está entre los k primeros rechazados. Si el mejor está entre los siguientes, es necesario que el mejor de todos los anteriores esté en los k primeros rechazados, y esta probabilidad es

$$P(\textit{el mejor de los i-1 candidatos está entre los k primeros/el i es el mejor}) = \frac{k}{i-1},$$

ya que hay $i-1$ posiciones para que esté el mejor, que son los casos posibles, y hay k posiciones para colocar al mejor que son los casos favorables al suceso A_i/B_i.

La probabilidad de la intersección es, por tanto

$$P(A_i \cap B_i) = P(A_i/B_i) \cdot P(B_i) = \frac{k}{i-1} \cdot \frac{1}{n},$$

en conclusión

$$\begin{aligned} P(k) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i/B_i) \cdot P(B_i) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{k} 0 \cdot \frac{1}{n}\right] + \left[\sum_{i=k+1}^{n} \frac{k}{i-1} \cdot \frac{1}{n}\right] = \\ &= \frac{k}{n} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-1} = \frac{k}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

El cálculo de esta suma es sencillo para valores pequeños de n. Para valores grandes podemos considerar que n tiende a infinito, escribiendo x como el límite de $\frac{k}{n}$, el primer factor es x y para la suma del paréntesis, utilizando la integral de Riemann como límite de una suma

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{k}{n}} + \frac{1}{\frac{k+1}{n}} + \cdots + \frac{1}{\frac{n-1}{n}}\right) = \int_x^1 \frac{1}{t}dt,$$

donde se ha considerado la función continua $f(t) = \frac{1}{t}$ y una partición regular del intervalo $[x, 1]$. Por tanto

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -x \int_1^x \frac{1}{t} dt = -x(\ln x - \ln 1) = -x \ln x.$$

Hallando la derivada de $P(x)$ con respecto a x e igualando a cero, queda

$$P'(x) = -1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 = \ln x$$

de donde resulta como valor crítico

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot$$

Como la derivada segunda es

$$P''(x) = -\frac{1}{x},$$

particularizando para el valor crítico, queda

$$P''(e^{-1}) = -\frac{1}{e^{-1}} = -e < 0,$$

luego se trata de un máximo. Es decir, la máxima probabilidad se alcanza para el valor

$$x = \frac{k}{n} = \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{2,718},$$

es decir, hay que escuchar y rechazar a k candidatos, aproximadamente una tercera parte, para obtener la mayor probabilidad posible de elegir al mejor candidato. Esta probabilidad será

$$P(x) = \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{2,718} \simeq 0,367 \simeq 37\%.$$

Para los primeros valores de n, hallando el cociente n/e y tomando como k el entero más próximo a n/e, se obtienen las probabilidades siguientes:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n/e	1,104	1,472	1,839	2,207	2,575	2,943	3,311	3,679	4,047	4,415
k	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4
$P(k)$	0,5	0,458	0,433	0,428	0,407	0,410	0,406	0,398	0,398	0,396

En el caso $n = 7$ es $n/e = 2,575$. El entero más próximo es 3, pero casi a la misma distancia que el 2. Es curioso que haciendo las operaciones para ambos valores de k se obtienen

n	7	7
n/e	2,575	2,575
k	2	3
$P(k)$	0,414	0,407

Es decir, que las probabilidades $P(k)$ van disminuyendo cuando n crece, pero hay valores de n y $k = n/e$, en que momentáneamente la probabilidad no decrece, como ocurre con $n = 7$ y $n = 8$.

Para valores de n mayores que 12 la diferencia entre $P(k)$ y $1/e$ es pequeña, por lo que puede tomarse como probabilidad para esos valores de n el valor $1/e$.

Queda la cuestión de la probabilidad de que la princesa tenga que elegir *un candidato peor que todos los rechazados.* Para que esto ocurra, el mejor m de todos los candidatos tiene que estar entre los k rechazados, así que la princesa elegirá al último de los candidatos porque ninguno superará al mejor ya rechazado. El último candidato presentado debe ser peor que los otros $k - 1$ candidatos rechazados.

Entre los rechazados está m y otros $k - 1$ candidatos que deben ser mejores que el último. Si el último candidato es 1, se cumple el suceso y esto puede ocurrir de

$$\binom{n-2}{k-1} k!(n-k-1)!$$

formas, ya que se eligen de entre los n candidatos, excepto m y 1, los que ocuparán las otras $k - 1$ posiciones entre los rechazados, donde ya está m, y se permutarán esos k candidatos y se permutarán los otros $n - k - 1$ candidatos.

Si el último candidato es 2, podemos elegir entre $n - 3$, ya que no deben ser ni 1, ni 2, ni m, los otros $k - 1$ puestos a rechazar, y permutar esos k candidatos y los otros $n - k - 1$ candidatos, luego puede hacerse de

$$\binom{n-3}{k-1} k!(n-k-1)!$$

formas. Si el último candidato es 3, elegimos entre los $n-4$ candidatos, donde no están ni 1, ni 2, ni 3, ni m, los $k-1$ puestos a rechazar y permutamos los k candidatos rechazados y permutamos los restantes $n-k-1$ candidatos, lo que puede hacerse de

$$\binom{n-4}{k-1}k!(n-k-1)!$$

formas. Si el último candidato es j, elegiremos los $k-1$ puestos de entre los $n-(j+1)$ candidatos y permutaremos esos k candidatos y los otros $n-k-1$, lo que puede hacerse de

$$\binom{n-(j+1)}{k-1}k!(n-k-1!)$$

formas diferentes. El último caso posible se tiene cuando los k mejores son los k rechazados y el último candidato es el $n-k$, que será el elegido a pesar de ser peor que todos los rechazados, esto puede hacerse de

$$\binom{n-(n-k+1)}{k-1}k!(n-k-1)! = \binom{k-1}{k-1}k! = k!(n-k-1)!$$

Por tanto, la suma de todos los casos favorables al suceso "*se elige un candidato peor que todos los rechazados*", sacando factor común los factores $k!$ y $(n-k-1)!$, es

$$k!(n-k-1)!\left[\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-4}{k-1}+\cdots+\binom{k-1}{k-1}\right] = k!(n-k-1)!\binom{n-1}{k}.$$

La suma del corchete se ha obtenido como la segunda parte de la propiedad "*Suma de una diagonal hasta un número combinatorio concreto*" que puede verse en la página 6 de [3], en las propiedades del triángulo aritmético.

Los casos posibles del suceso son claramente $n!$, por tanto la probabilidad que se busca es

$$\begin{aligned} P(\textit{elegir uno peor que los rechazados}) &= \frac{k!(n-k-1)!\binom{n-1}{k}}{n!} = \\ &= \frac{k!(n-k-1)!(n-1)!}{n!k!(n-k-1)!} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Es curioso que el resultado no depende de k y, por otra parte, a medida que aumenta el número de pretendientes, n, la probabilidad de que la princesa tenga que soportar a un candidato peor que todos los rechazados, tiende a cero.

En el caso $n = 3, k = 1$, ya visto es

$$P(\textit{elegir uno peor que los rechazados}) = \frac{1}{3}.$$

En el caso $n = 4, k = 1$, ya visto es

$$P(\textit{elegir uno peor que los rechazados}) = \frac{1}{4}.$$

En el caso $n = 4, k = 2$, ya visto es

$$P(\textit{elegir uno peor que los rechazados}) = \frac{1}{4}.$$

En el caso $n = 5$, la probabilidad será

$$P(\textit{elegir uno peor que los rechazados}) = \frac{1}{5} = \frac{24}{5!}.$$

estos 24 casos serán 12 de los que acaben en 1, 8 de los que terminen en 2 y 4 de los que acaben en 3.

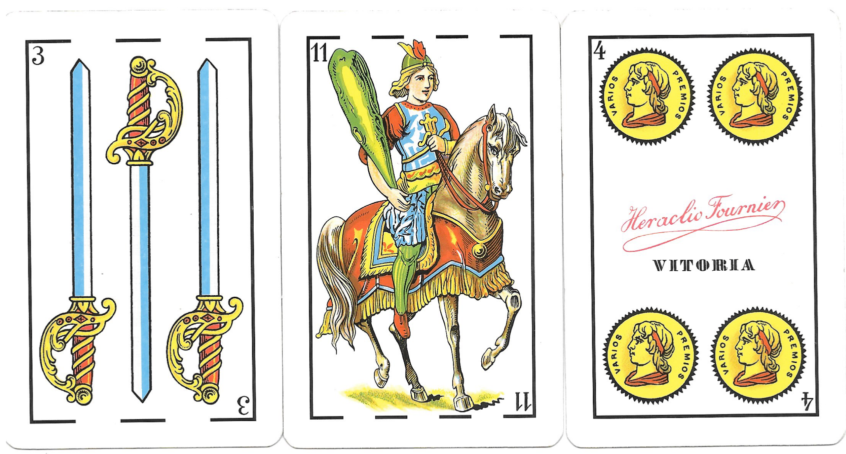
En todos estos casos el resultado obtenido coincide con los cálculos anteriormente hechos de forma descriptiva.

2. El juego de las siete y media

Las *siete y media* es un juego de cartas con baraja española de 40 cartas que consiste en sumar un valor lo más próximo posible a siete puntos y medio, pero sin pasarse de esa cantidad. Al comienzo se sortea el jugador que hará de banca y la banca jugará contra cada uno de los jugadores, de forma que la banca cobrará a los jugadores que hayan perdido y pagará a los que hayan conseguido mayor puntuación que la banca. En caso de igualdad la banca gana. Para quitar la banca al jugador que la tiene es necesario conseguir *siete y media* y que la banca no tenga esa puntuación.

Las cartas numéricas, del 1 al 7, valen su valor y las figuras valen medio punto. Cuando un jugador se pasa de siete puntos y medio tiene la obligación de indicarlo diciendo "pasión" o "me pasé" y depositar tapadas sus cartas sobre la mesa.

El jugador que actúa de banca comienza repartiendo una carta a cada jugador y una para la banca, todas ellas tapadas, es decir boca abajo para que no se vean. A continuación, el primer jugador dirá "carta" o "me planto" según quiera o no recibir otra carta. Si quiere una carta tapada debe descubrir la que tiene, en otro caso se le entregará a la vista de todos, de forma que todas las cartas sean visibles salvo una de cada jugador. Si con la carta recibida se ha pasado de siete puntos y medio tiene que decirlo. Es lógico que cada jugador mantenga como carta tapada la de mayor valor de las que tiene, en la medida de lo posible, para ocultar a los demás si está cerca de conseguir una buena jugada.



Siete y media

Una vez que se ha plantado o se ha pasado, se hace lo mismo con el siguiente jugador y así sucesivamente, hasta que le toca el turno a la banca, que descubrirá la carta que tiene e irá diciendo "carta" o "me planto" hasta terminar, con las cartas descubiertas porque ya no hay nada que ocultar, o dirá "pasión" si se ha pasado. La banca pagará a los que tengan una jugada mejor y cobrará a los que la tengan igual o peor que la banca o se hayan pasado. Si la banca se ha pasado pagará a todos los queden sin pasarse.

¿Cuál es la mejor táctica para jugar a las siete y media?

Resolución

La estrategia óptima consiste en fijar una puntuación en la que debemos plantarnos y ser consecuentes con ella. Las mejores puntuaciones para plantarnos son 5 y 5,5. Es decir, cuando tengamos menos de 5 pediremos carta y si tenemos 5 o superior nos plantaremos. La razón de elegir esa puntuación se basa en las probabilidades de perder o ganar si pedimos carta o nos plantamos.

Si tenemos 5 puntos, las cartas con las que nos pasaríamos son 3, 4, 5, 6 y 7, es decir $5 \cdot 4 = 20$ cartas, y con las otras 20 nos quedaríamos dentro sin pasarnos. Es decir, con esta táctica la probabilidad de ganar o de perder es la misma.

Si tenemos 5,5 puntos, las cartas con las que nos pasamos son también 3, 4, 5, 6 y 7, es decir 20 cartas, lo mismo que si tenemos 5 puntos.

Si tenemos 6 puntos, las cartas con las que nos pasamos son 2, 3, 4, 5, 6 y 7, es decir $6 \cdot 4 = 24$, y con las otras 16 nos quedaremos sin pasarnos. Por tanto, la probabilidad de pasarnos si pedimos carta es $24/40 = 3/5$ y la de quedarnos es $2/5$. No debemos pedir más cartas.

Si tenemos 4 o 4,5 puntos, nos pasaremos con 4, 5, 6 y 7, es decir $4 \cdot 4 = 16$, y con las otras 24 cartas nos quedaremos sin pasarnos. Así que la probabilidad de pasarnos es $16/40 = 2/5$ y la de quedarnos dentro es $3/5$. Debemos pedir carta.

Si la banca hace lo mismo, de cada cuatro juegos que juguemos, en promedio, nos pasaremos dos y la banca otros dos. Por tanto, si nos pasamos y la banca no se pasa, gana la banca, y si es la banca la que se pasa y nosotros no, ganamos, en otro caso nos pasaremos ambos, banca y nosotros, y en el cuarto caso nos quedaremos con nuestra jugada, la banca con la suya, y ganará quien tenga más suerte en las cartas recibidas.

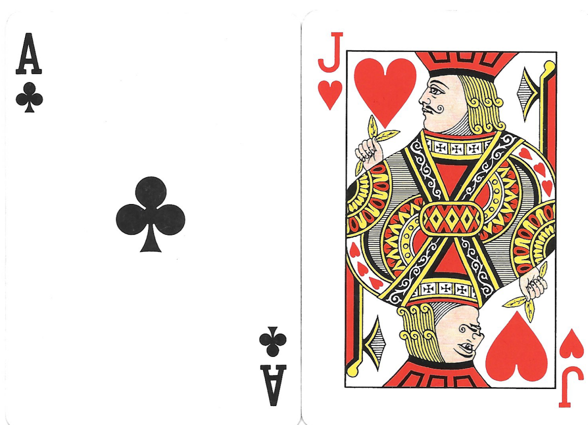
Esto parece un juego equilibrado o justo, pero hay una diferencia a favor de la banca, en caso de empate en la puntuación gana la banca. Así que no hay estrategia para ganar a este juego más que intentar ser la banca. Esta diferencia es muy pequeña, lo que hace que a los casinos no les interese este juego. Este es un juego para practicar en familia o entre amigos.

Se puede mejorar la táctica observando las cartas que estén a la vista y las que tenemos, pero es complicado porque el juego se desarrolla con rapidez y no está permitido hacer anotaciones ni cálculos que no sean mentales y rápidos.

3. El juego del blackjack

El *blackjack* es un juego de cartas con baraja francesa de 52 cartas que consiste en sumar un valor lo más próximo a 21 puntos, pero sin pasarse de esa cantidad. Todos los jugadores juegan contra la banca, intentando conseguir una jugada mejor. Quienes la consiguen cobran de la mesa la misma cantidad que habían apostado, quienes pierden porque se pasan de 21 o porque tienen una jugada inferior pagan a la mesa lo que habían apostado. La mesa tiene una reglas fijas: debe pedir carta siempre que su puntuación sume 16 o menos y está obligada a plantarse si la suma es 17 o más.

Las cartas numéricas cuentan por su valor, las figuras valen 10 puntos y el as vale 1 u 11, a elección del jugador. Para la mesa, los ases valen 11 mientras no se pase de 21 y valen 1 en el caso contrario.



Blackjack o 21 natural

La mejor jugada es conseguir 21 con solo dos cartas, que deben ser un as y una carta de valor 10, esta jugada se llama el *blackjack* o *21 natural* y gana al 21 conseguido de otra forma.

La mesa comienza repartiendo, desde su izquierda hacia su derecha, a cada jugador una carta boca abajo y una carta para la mesa. A continuación reparte una carta boca arriba a cada jugador, incluyendo la carta de la casa como última carta repartida. Luego pregunta a cada jugador, sucesivamente, si quiere una o más cartas. Se pueden pedir cartas hasta que o bien se pase de 21 o crea tener una buena jugada, en cuyo caso se indica que no se desean más cartas. Cada jugador decide si pide carta o se planta. En caso de pasarse de 21 puntos es obligatorio declararlo y el jugador pierde su apuesta.

Al final la mesa, con las cartas descubiertas porque ya no hay nada que ocultar, pedirá más cartas o se plantará con sus reglas fijas. En caso de empate en puntuación se considera una jugada nula y el jugador recupera lo apostado.

Hay otras reglas más complicadas para el caso en que la mesa recibe de inicio un as y para el jugador que recibe dos cartas iguales y tiene la posibilidad de desdoblarse, es decir jugar como dos jugadores. Hay básicamente un blackjack europeo y otro americano con reglas diferentes. No entramos en estas reglas, solo se pretende justificar el valor con el que se debe uno plantar de acuerdo con el Cálculo de probabilidades.

¿Cuál es la mejor táctica para jugar al blackjack?

Resolución

La táctica que utiliza la banca no es la mejor. En el caso de los casinos, el crupier utiliza siempre la misma técnica y en general, aunque algunos jugadores puedan ganar y otros perder dependiendo de la suerte que tengan ese día, la mesa siempre ganará, la razón es que los jugadores juegan antes que la mesa y en cuanto se pasan deben pagar. Esa pequeña diferencia supone que a la larga la banca siempre tenga ganancias.

La baraja tiene del 1 al 10 además de J, Q y K, es decir 13 cartas de cada palo. Así que no hay una puntuación en la que plantarse o pedir carta tenga un

50% de posibilidades porque 13 es impar. En la tabla

tenemos	nos pasamos con
14	46%
15	54%
16	62%
17	69%

vemos la probabilidad de pasarnos si pedimos carta teniendo esas puntuaciones. Como la banca tiene obligación de pedir carta con 16 o menos, si nos plantamos con 14 o 15 puntos, es decir con 14 puntos o más, nos pasaremos en el 50% los casos y la banca en el 62%. Si nos pasamos menos veces que la banca, ganaremos más veces de las que perderemos y el saldo será positivo a favor nuestro.

Si somos muy observadores podemos ver las cartas que hay sobre la mesa y modificar esas probabilidades, pero en los casinos se juega con más de una baraja, entre uno y ocho mazos de cartas, para que la influencia de las cartas que se ven sea poco significativa, aparte de que si nos ven "contar cartas" nos invitarán a marcharnos.

4. Cartas distribuidas a lo loco

Una secretaria coloca aleatoriamente n cartas diferentes en n sobres con destinos diferentes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a su destino? ¿Cómo varía esta probabilidad cuando n crece indefinidamente?

Resolución

Sea A_i el suceso consistente en que haya coincidencia al elegir la i-ésima carta y el i-ésimo destino. Existen $n!$ formas de ordenar los n sobres y la carta i-ésima va a su sobre de tantas formas como $(n-1)!$, que son las posibles asignaciones de las restantes cartas. Por tanto es

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\cdot$$

Sea el suceso $H = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ el suceso consistente en que haya al menos una coincidencia. Se verifica que

$$
\begin{aligned}
P(A_i \cap A_j) &= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \qquad i \neq j, \\
P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \qquad i, j, k, \text{ distintos}, \\
&\vdots \\
P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) &= \frac{(n-(n-1))!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots 2}, \\
P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= \frac{1}{n!},
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
P(H) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \binom{n}{1}\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \\
&\quad +(-1)^n \binom{n}{n-1}\frac{1}{n(n-1)\cdots 2} + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!} = \\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

es la probabilidad pedida.

Veamos lo que ocurre cuando n crece indefinidamente, es decir cuando n tiende a infinito. Por el desarrollo de McLaurin de la función e^x sabemos que es

$$
e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots\right) = 1 - \lim_n P(H),
$$

luego resulta

$$
\lim_n P(H) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}\cdot
$$

En la resolución de la segunda cuestión de este ejercicio interviene de nuevo el número e, tal como ocurrió en el ejercicio de la princesa cuando el número n tiende a infinito.

5. Las hermanas González

Las hermanas González son de Sevilla, muy morenas como es frecuente en la ciudad. Si al azar nos encontramos con tres de las hermanas González, hay una probabilidad del 50% de que las tres tengan los ojos negros. ¿Cuántas hermanas son y cuántas tienen los ojos negros?

Resolución

El enunciado dice que tomando al azar tres de las hermanas, la probabilidad de que las tres tengan los ojos negros es igual a $1/2$. Supongamos que sean h hermanas y que n de ellas tengan ojos negros. Siendo N_i el suceso "*la hermana i tiene los ojos negros*", por probabilidad condicionada tenemos que

$$\begin{aligned} P(\textit{las tres con ojos negros}) &= P(N_1, N_2/N_1, N_3/N_1 \cap N_2) = \\ &= \frac{n}{h} \cdot \frac{n-1}{h-1} \cdot \frac{n-2}{h-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{h(h-1)(h-2)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de donde resulta la ecuación diofántica

$$2n(n-1)(n-2) = h(h-1)(h-2),$$

siendo h y n números naturales y $h \geq 4$, $n \geq 3$.

Para $h = 4$ es $2n(n-1)(n-2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 4 \cdot 3 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow$ *sin solución.*

Para $h = 5$ es $2n(n-1)(n-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 5 \cdot 3 \cdot 2 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow$ *sin solución.*

Para $h = 6$ es $2n(n-1)(n-2) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow$ *la solución es* $n = 5$.

Para $h = 7$ es $2n(n-1)(n-2) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 7 \cdot 5 \cdot 3 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow$ *sin solución.*

No puede haber más soluciones que la encontrada, $n = 5$, porque al dividir entre 2 uno de los tres factores, cada vez más grandes, los factores resultantes no son números consecutivos.

Así que la única posibilidad es que las hermanas González son seis y cinco de ellas tienen los ojos negros. En efecto, el número de combinaciones posibles de tres hermanas con las seis que son, es $\binom{6}{3}$, mientras que si entra la que no tiene los ojos negros, con las otras cinco restantes pueden hacerse $\binom{5}{2}$ grupos, por lo que la probabilidad de que las tres que nos encontremos no tengan todas los ojos negros será de

$$P(\textit{las tres no tienen ojos negros}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{5!3!3!}{2!3!6!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

y la probabilidad de que las tres tengan ojos negros es también igual a $1/2$.

6. Familias de cinco hijos

La probabilidad de que nazca un varón es 0,5 y es independiente del sexo del hermano anterior.

a) Halla la probabilidad de que en una familia de cinco hermanos, dos sean varones y de que al menos dos sean varones.

b) Si se sabe que el menor de los cinco es varón, responde ahora al apartado anterior.

RESOLUCIÓN

a) Representando por V a los varones y por H a las mujeres, la probabilidad de que, en una familia de 5 hermanos, sean 2 varones y 3 hembras, por este orden $VHVHH$, es

$$P(VHVHH) = P(V)P(H)P(V)P(H)P(H) = (0,5)^5 = \frac{1}{32},$$

ya que el sexo de cada hermano es independiente del anterior.

Como dos varones y tres hembras puede llegar a tenerse de $PR_5^{3,2} = 10$ formas distintas, tenemos que

$$P(2\ \textit{varones y}\ 3\ \textit{hembras}) = 10 \cdot P(VHVHH) = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

y puesto que 1 varón y 4 hembras pueden tenerse de 5 formas diferentes, será

$$\begin{aligned} P(\textit{Al menos 2 varones}) &= 1 - P(\textit{Ningún varón o uno}) \\ &= 1 - P(HHHHH) - 5 \cdot P(VHHHH) \\ &= 1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{32} = \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

b) En familias de 5 hermanos, el dato de que el menor es varón va a modificar los valores de las probabilidades anteriores. Si llamamos M al suceso "*El menor es varón*", tenemos que

$$\begin{aligned} P(\textit{2 varones}/M) &= P(\textit{1 varón en los cuatro primeros}) \\ &= 4 \cdot P(VHHH) = 4 \cdot (0,5)^4 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

ya que un varón entre los cuatro primeros puede conseguirse de $PR_4^{3,1} = 4$ formas distintas, y

$$\begin{aligned} P(\textit{Al menos 2 varones}/M) &= 1 - P(\textit{Ninguno o uno}/M) \\ &= 1 - P(\textit{Ninguno}/M) - P(\textit{Uno}/M) \\ &= 1 - 0 - P(HHHH) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que en familias de 5 hermanos, es más difícil que haya 2 varones en la que sepamos que uno lo es, que en la que no sepamos nada. Y es mucho más fácil que haya al menos dos varones si ya sabemos que uno lo es.

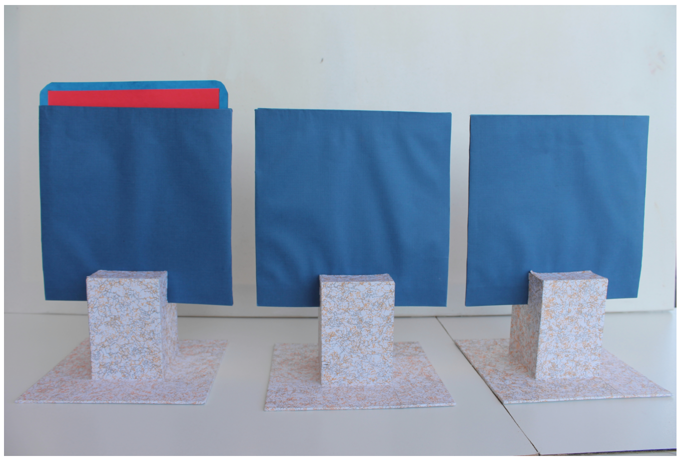
7. El problema de las tres tarjetas

Se tienen tres tarjetas tales que una tiene dos caras rojas, otra tiene dos caras blancas, y la otra tiene una cara roja y una blanca.

Se introducen en sobres distintos y se elige uno al azar. Se extrae la tarjeta y se observa solo una de las caras, que resulta ser roja, tal como vemos en la foto de la página siguiente. ¿Cuál es el color de la otra cara?

Resolución

Se trata de adivinar el color de la cara oculta de la tarjeta. Pero adivinar en el sentido científico de la palabra, es decir decir cuál debe ser el color con la máxima probabilidad posible.



En una primera aproximación podríamos pensar que como en total hay tres caras rojas y tres blancas, es indiferente lo que digamos porque la probabilidad de acertar será del 50%. Pero este razonamiento es erróneo, ya que si vemos una cara roja, esa no puede ser, y las que quedan que no vemos son tres blancas y dos rojas, así que parece mejor decir que es blanca con 3/5 de probabilidad contra decir roja que serían 2/5.

Este razonamiento también es erróneo porque la tarjeta que vemos no es la blanca-blanca. Así que, o es la roja-roja, y vemos una de las caras, o el la roja-blanca y vemos la cara roja, la oculta puede ser la blanca. Parece entonces que la cara oculta puede ser roja de la tarjeta roja-roja o puede ser blanca de la tarjeta roja-blanca. Estamos otra vez en el 50%, roja o blanca con igual probabilidad.

Este razonamiento es también falso. Si fuese la tarjeta roja-blanca y vemos el color rojo, la otra cara será blanca, pero si fuese la tarjeta roja-roja y vemos el color rojo, podemos estar viendo una de las caras rojas o la otra, y en ambos casos la cara oculta será roja. Así que hay dos casos en esta tarjeta y solo uno en la tarjeta roja-blanca. En conclusión debemos decir que la otra cara será roja y la probabilidad de acertar será de 2/3, en contra de decir que es blanca que tendrá probabilidad igual a 1/3.

Hay otro razonamiento contundente y más interesante. Antes de elegir el sobre y extraer la tarjeta para ver una de sus caras, sabemos que hay dos tarjetas que tienen el mismo color en ambas caras y una sola tarjeta que tiene los colores diferentes. Así que, si decimos el mismo color que vemos la probabilidad de acertar será de 2/3, mientras que si decimos el color contrario, estaríamos en la tarjeta con colores distintos y tendríamos probabilidad 1/3. Este razonamiento es más fino porque se llega a la conclusión antes de elegir el sobre y extraer la tarjeta. En nuestro caso, cuando se extrae la tarjeta y se ve que es cara roja, debemos decir que la otra cara es también roja. Acertaremos en el 66,6% de los casos.

8. Calcetines blancos y rojos

Se tienen calcetines blancos y rojos revueltos en un cajón. Si se extraen dos calcetines al azar, la probabilidad de que ambos sean blancos es 1/2. Calcula:

a) el número mínimo de calcetines que hay en la caja.

b) el número mínimo de calcetines que contiene la caja si el número de calcetines rojos es par.

Resolución

a) Esta cuestión puede hacerse de dos formas distintas.

Primer método

Supongamos que x es el número de calcetines blancos e y es el de calcetines rojos. Llamando B_i al suceso *"es blanco el calcetín extraído en el intento* i", podemos escribir, por probabilidad condicionada que

$$P(B_1, B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{x-1}{x+y-1} = \frac{1}{2},$$

de donde, operando se tiene

$$2x(x-1) = (x+y)(x+y-1)$$

es decir
$$2x^2 - 2x = x^2 + xy - x + xy + y^2 - y$$
o bien
$$x^2 - x - 2xy - y^2 + y = 0$$
resultando la ecuación diofántica

$$x^2 - (2y+1)x + (y - y^2) = 0,$$

donde sabemos que $x, y \in \mathbb{N}$. Resolviendo en x esta ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y + 1 \pm \sqrt{(2y+1)^2 - 4(y-y^2)}}{2} = \\ &= y + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4y^2 + 4y + 1 - 4y + 4y^2}}{2} = y + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8y^2+1}}{2} \end{aligned}$$

resulta que hay que dar valores a y para que $8y^2 + 1$ sea cuadrado perfecto. Para $y = 1$ se tiene que
$$x = 1 + \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$
es decir $x = 3$ es la menor solución posible ya que $x = 0$ no es válida. Luego $x = 3$, $y = 1$.

Segundo método

Encontremos, utilizando la fórmula obtenida con la probabilidad condicionada, el menor número natural x tal que

$$\frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{1}{2},$$

fórmula que no se verifica para $x = 1$ ni para $x = 2$, pero sí para $x = 3$, siendo entonces $y = 1$.

b) Ahora debe ser $y = 2k$. La ecuación es por tanto, sustituyendo en la expresión despejada de x,

$$x = 2k + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8(2k)^2+1}}{2} = 2k + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{32k^2+1}}{2}$$

por lo que $32k^2+1$ debe ser el menor cuadrado perfecto posible, es decir

$$32k^2+1=m^2.$$

Pero m debe ser impar, es decir $m=2p+1$, luego se tiene

$$32k^2+1=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$$

es decir

$$32k^2=4p^2+4p$$

o bien

$$8k^2=p^2+p=p(p+1).$$

Luego p ó $p+1$ debe ser múltiplo de 8, el menor posible es $p=8$, $p+1=9$, de donde $k^2=9$ y $k=3$. Por tanto es $m=17$. Con $k=3$ es

$$x=6+\frac{1}{2}\pm\frac{17}{2}=\frac{13}{2}\pm\frac{17}{2}=\frac{30}{2}=15,$$

es decir $x=15$ e $y=6$, ya que la solución del signo menos no es válida al ser negativo el resultado.

9. El problema del opositor

Un opositor debe examinarse de un temario con 60 temas, de los que el tribunal saca al azar 4 temas para que los opositores respondan a un tema a su elección de entre los 4. Si el opositor se sabe m temas, ¿qué probabilidad tiene de aprobar?

Resolución

Hay $\binom{60}{4}$ maneras diferentes de obtener los cuatro temas de entre los 60 que hay. Esos son los casos posibles, es decir todas las posibles combinaciones que el tribunal puede tener al extraer al azar los cuatro números. Si se sabe $m\leq 60$, el opositor suspenderá cuando no se sepa ninguno de los cuatro temas extraidos, es decir en $\binom{60-m}{4}$ casos. Por tanto, utilizando la regla de Laplace, casos favorables partido por casos posibles, la probabilidad de suspender es

$$\begin{aligned} P(suspender) &= \frac{\binom{60-m}{4}}{\binom{60}{4}} = \frac{\frac{(60-m)(59-m)(58-m)(57-m)}{4!}}{\frac{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57}{4!}} = \\ &= \frac{(60-m)(59-m)(58-m)(57-m)}{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57}. \end{aligned}$$

En concreto:

$$\begin{aligned} m &= 50 : P(sus) = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57} \simeq 0,0004 \quad \Rightarrow \quad P(aprobar) = 99,96\% \\ m &= 40 : P(sus) = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57} \simeq 0,0099 \quad \Rightarrow \quad P(aprobar) = 99,01\% \\ m &= 30 : P(sus) = \frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57} \simeq 0,0562 \quad \Rightarrow \quad P(aprobar) = 94,38\% \\ m &= 20 : P(sus) = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57} \simeq 0,1874 \quad \Rightarrow \quad P(aprobar) = 81,26\% \\ m &= 10 : P(sus) = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47}{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57} \simeq 0,4723 \quad \Rightarrow \quad P(aprobar) = 52,77\%. \end{aligned}$$

Se observa que el opositor que se sepa solo 10 de los temas del temario, tiene más de un 50% de probabilidad de aprobar el examen. Esto es sorprendente e increíble para los opositores que no son de matemáticas, pero los números lo demuestran.

10. Se han lanzado unos dados

Se han lanzado unos dados y se ha obtenido una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que se haya jugado con dos dados?

Resolución

Lo primero que tenemos que deducir es que ha jugado con un número de dados que está entre 1 y 4, ya que de otro modo no se habrían conseguido los 4 puntos como suma. Debemos suponer que los sucesos

$$A_i = \text{“}\textit{se lanzan i dados}\text{”}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

son equiprobables, es decir que, al no tener más información, las probabilidades de estos cuatro sucesos son la misma y por tanto

$$P(A_i) = \frac{1}{4}.$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total es

$$\begin{aligned} P(\textit{“obtener suma 4”}) &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(\textit{“obtener suma 4”}/A_i) = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}+\frac{3}{36}+\frac{3}{216}+\frac{1}{1296}\right] = \frac{216+108+18+1}{4\cdot 1296} = \frac{343}{5184}. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Bayes se tiene

$$P(A_2/\textit{“obtener suma 4”}) = \frac{P(A_2)P(\textit{“obtener suma 4”}/A_2)}{P(\textit{“obtener suma 4”})} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{36}}{\frac{343}{5184}} = \frac{108}{343}.$$

Del mismo modo se puede calcular la probabilidad de haber jugado con un solo dado, con tres dados o con cuatro dados. Estas resultan ser:

$$\begin{aligned} P(A_1/\textit{“obtener suma 4”}) &= \frac{P(A_1)P(\textit{“obtener suma 4”}/A_1)}{P(\textit{“obtener suma 4”})} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{343}{5184}} = \frac{216}{343}, \\ P(A_3/\textit{“obtener suma 4”}) &= \frac{P(A_3)P(\textit{“obtener suma 4”}/A_3)}{P(\textit{“obtener suma 4”})} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{216}}{\frac{343}{5184}} = \frac{18}{343}, \\ P(A_4/\textit{“obtener suma 4”}) &= \frac{P(A_4)P(\textit{“obtener suma 4”}/A_4)}{P(\textit{“obtener suma 4”})} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1296}}{\frac{343}{5184}} = \frac{1}{343}. \end{aligned}$$

Es claro que la suma de estas cuatro probabilidades es

$$\frac{108}{343}+\frac{216}{343}+\frac{18}{343}+\frac{1}{343} = 1.$$

Nota final

El ejercicio 1 está basado en el comentario *"La estrategia descrita para el juego del gúgol no es aplicable al caso de la joven casadera"*, que aparece en [1]. En este juego se dispone de n tarjetas con diferentes números y gana el jugador que consigue el número más alto después de rechazar algunas tarjetas y aceptar una de las restantes. Por supuesto que es aplicable a la princesa que busca prometido tal como se ha visto. El juego es muy antiguo y la palabra Google deriva de ese juego. Un gúgol es el número 1 seguido de cien ceros, es decir 10^{100}.

Actualmente algunos autores han cambiado el nombre del juego y ahora es conocido como *el problema de la secretaria.* También es llamado *el problema de las cajas*, que se ha utilizado en algún programa de televisión. Se dispone que n cajas que contienen diferentes cantidades de dinero y el concursante puede ir abriéndolas en el orden que desee y decidir cuando quiere "plantarse". No está permitido volverse atrás para elegir alguna caja ya rechazada.

El ejercicio 7 es una variante de un ejemplo tomado de [2]. Los ejercicios 4, 6, 8 y 10 están más o menos tomados de [4]. Los restantes son variantes de ejercicios bien conocidos.

Bibliografía

[1] Gardner M. Nuevos pasatiempos matemáticos. *Ed. Alianza Editorial.* Madrid, 1972.

[2] Pajares A, Tomeo V. Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores. Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos. Universidad Complutense de Madrid, CT 03-2009, Madrid, 2009.

[3] Tomeo V, Torrano E. Triángulos y matrices de Pascal. Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos. Universidad Complutense de Madrid, CT 01-2020, Madrid, 2020.

[4] Uña I, Tomeo V, San Martín J. Cálculo de Probabilidades. *Ed Garceta,* Madrid, 2009.

Cuadernos de Trabajo
Facultad de Estudios Estadísticos

CT01/2020 **Triángulos y matrices de Pascal**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT05/2019 **Cálculo de la resolvente y suma de productos combinados en el caso hermitiano**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT04/2019 **Relaciones entre las medias estadísticas: demostraciones**
Elena Castiñeira Holgado y Venancio Tomeo Perucha

CT03/2019 **Introducción a MAPLE. Versión 18**
Juan Julián Ávila Tejera

CT02/2019 **Breve historia del cálculo integral. Cálculo integral elemental**
Juan Julián Ávila Tejera

CT01/2019 **Matrices y polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT03/2018 **Las matemáticas en el cine**
Gloria Cabrera Gómez

CT02/2018 **Brecha madre-padre en el uso de las medidas de conciliación y su efecto sobre las carreras profesionales de las madres**
José Andrés Fernández Cornejo y Lorenzo Escot (Coordinadores)
Autores: José Andrés Fernández Cornejo, Lorenzo Escot, Eva María del Pozo, Sabina Belope Nguema, Cristina Castellanos Serrano, Miryam Martínez, Ana Bernabeu, Lorenzo Fernández Franco, Juan Ignacio Cáceres, María Ángeles Medina Sánchez

CT01/2018 **El campo de valores de una matriz y su aplicación a los polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT02/2015 **Prospectiva del proceso electoral a Rector de la Universidad Complutense 2015. Resultados del sondeo de intención de voto en primera y segunda vuelta**
Lorenzo Escot Mangas, Eduardo Ortega Castelló, Lorenzo Fernández Franco y Kenedy Alba (Coordinadores)

CT01/2015 **The polemic but often decisive contribution of computer science to linguistic and statistical research on translation accuracy and efficiency**
Antonio Ñíguez Bernal

CT05/2014 **Las medidas estadísticas: ejercicios motivadores**
Almudena Pajares García y Venancio Tomeo Perucha

CT04/2014 **Jugando con la estadística (y la probabilidad)**
Gloria Cabrera Gómez

CT03/2014 **Análisis Estadístico de las Consultas a la Base de Datos de Ayudas e Incentivos a Empresas de la Dirección General de Industria y de la PYME.**

Adolfo Coello de Portugal Muñoz, Juana María Alonso Revenga

CT02/2014 **Values of games with weighted graphs**
E. González-Arangüena, C. Manuel; M. del Pozo

CT01/2014 **Estimación de la tasa de retorno de la carta del censa de los Estados Unidos a través del modelo de regresión lineal y técnicas de predicción inteligentes.**
José Luis Jiménez-Moro y Javier Portela García Miguel

CT03/2013 **Provisión de siniestros de incapacidad temporal utilizando análisis de supervivencia.**
Ana Crespo Palacios y Magdalena Ferrán Aranaz

CT02/2013 **Consumer need for touch and Multichannel Purchasing Behaviour.**
R. Manzano, M. Ferrán y D. Gavilán

CT01/2013 **Un método gráfico de comparación de series históricas en el mercado bursátil.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2012 **Calculando la matriz de covarianzas con la estructura de una red Bayesiana Gaussiana**
Miguel A. Gómez Villegas y Rosario Susi

CT02/2012 **What's new and useful about chaos in economic science.**
Andrés Fernández Díaz, Lorenzo Escot and Pilar Grau-Carles

CT01/2012 **A social capital index**
Enrique González-Arangüena, Anna Khmelnitskaya, Conrado Manuel, Mónica del Pozo

CT04/2011 **La metodología del haz de rectas para la comparación de series temporales.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2011 **Game Theory and Centrality in Directed Social Networks**
Mónica del Pozo, Conrado Manuel, Enrique González-Arangüena y Guillermo Owen.

CT02/2011 **Sondeo de intención de voto en las elecciones a Rector de la Universidad Complutense de Madrid 2011**
L.Escot, E. Ortega Castelló y L. Fernández Franco (coords)

CT01/2011 **Juegos y Experimentos Didácticos de Estadística y Probabilidad**
G. Cabrera Gómez y Mª.J. Pons Bordería

CT04/2010 **Medio siglo de estadísticas en el sector de la construcción residencial**
M. Ferrán Aranaz

CT03/2010 **Sensitivity to hyperprior parameters in Gaussian Bayesian networks.**
M.A. Gómez-Villegas, P. Main, H. Navarro y R. Susi

CT02/2010 **Las políticas de conciliación de la vida familiar y laboral desde la perspectiva del empleador. Problemas y ventajas para la empresa.**
R. Albert, L. Escot, J.A. Fernández Cornejo y M.T. Palomo

CT01/2010 **Propiedades exóticas de los determinantes**
Venancio Tomeo Perucha

CT05/2009 **La predisposición de las estudiantes universitarias de la Comunidad de Madrid a auto-limitarse profesionalmente en el futuro por razones de conciliación**
R. Albert, L. Escot y J.A. Fernández Cornejo

CT04/2009 **A Probabilistic Position Value**
A. Ghintran, E. González–Arangüena y C. Manuel

CT03/2009 **Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores**
A. Pajares García y V. Tomeo Perucha

CT02/2009 **La disposición entre los hombres españoles a tomarse el permiso por nacimiento. ¿Influyen en ello las estrategias de conciliación de las empresas?**
L. Escot, J.A. Fernández-Cornejo, C. Lafuente y C. Poza

CT01/2009 **Perturbing the structure in Gaussian Bayesian networks**
R. Susi, H. Navarro, P. Main y M.A. Gómez-Villegas

CT09/2008 **Un experimento de campo para analizar la discriminación contra la mujer en los procesos de selección de personal**
L. Escot, J.A. Fernández Cornejo, R. Albert y M.O. Samam

CT08/2008 **Laboratorio de Programación. Manual de Mooshak para el alumno**
D. I. de Basilio y Vildósola, M. González Cuñado y C. Pareja Flores

CT07/2008 **Factores de protección y riesgo de infidelidad en la banca comercial**
J. Mª Santiago Merino

CT06/2008 **Multinationals and foreign direct investment: Main theoretical strands and empirical effects**
María C. Latorre

CT05/2008 **On the Asymptotic Distribution of Cook's distance in Logistic Regression Models**
Nirian Martín y and Leandro Pardo

CT04/2008 **La innovación tecnológica desde el marco del capital intelectual**
Miriam Delgado Verde, José Emilio Navas López, Gregorio Martín de Castro y Pedro López Sáez

CT03/2008 **Análisis del comportamiento de los indecisos en procesos electorales: propuesta de investigación funcional predictivo-normativa**
J. Mª Santiago Merino

CT02/2008 **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi

CT01/2008 **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González–Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den B

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID