CUADERNOS DE TRABAJO

FACULTAD DE ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

Series geométricas, aritmético-geométricas y algunos ejercicios de probabilidad

Venancio Tomeo Perucha

Cuaderno de Trabajo número 03/2020

UCM

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Los Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos constituyen una apuesta por la publicación de los trabajos en curso y de los informes técnicos desarrollados desde la Facultad para servir de apoyo tanto a la docencia como a la investigación.

Los Cuadernos de Trabajo se pueden descargar de la página de la Biblioteca de la Facultad www.ucm.es/BUCM/est/, en la página del Repositorio Institucional UCM E-Prints Complutense y en la sección de investigación de la página del centro www.ucm.es/centros/webs/eest/

CONTACTO:

Biblioteca de la Facultad de Estudios Estadísticos

Universidad Complutense de Madrid

Av. Puerta de Hierro, S/N

28040 Madrid

Tlf. 913944035

buc_est@buc.ucm.es

ISSN: 2341-2550

Series geométricas, aritmético-geométricas y algunos ejercicios de probabilidad

Venancio Tomeo

Dpto. Álgebra, Geometría y Topología
Facultad Estudios Estadísticos, UCM
tomeo@ucm.es

26 de noviembre de 2020

Resumen:
En el presente trabajo se estudian las series geométricas y las series aritmético-geométricas, de primer y de segundo orden, su convergencia y su suma, para aplicar estas fórmulas al Cálculo de probabilidades. Se trata de hallar la probabilidad, la esperanza matemática y la varianza en casos de jugadores que compiten en el lanzamiento de dados o monedas, o en la extracción de bolas de urnas o bolsas. Los ejercicios son muy semejantes en sus enunciados, pero la forma de resolver unos y otros puede ser bien diferente.

Palabras clave
Series geométricas, series aritmético-geométricas, convergencia, probabilidad condicionada, probabilidad total, esperanza matemática, varianza.

Contenido

1. Sucesiones aritméticas y geométricas 3

2. Series geométricas 4

3. Series aritmético-geométricas. 5

4. Otro enfoque 7

5. Ejercicios de probabilidad. 8

Bibliografía. 25

1. Sucesiones aritméticas y geométricas

Una sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ es un conjunto infinito numerable de números reales o complejos. En este trabajo con limitaremos a números reales que son los utilizados en Cálculo de probabilidades. Formalmente una sucesión es una aplicación del conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ en $\mathbb{R}$.

Una sucesión es aritmética si cada término se obtiene del anterior sumando a ese la misma cantidad, d, que se llama *diferencia*. Si el primer término es a, los términos de la sucesión serán

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ \cdots$$

Una sucesión es geométrica si cada término se obtiene del anterior multiplicando a ese término por la misma cantidad, r, que se llama *razón*. Si el primer término es a, los términos de la sucesión serán

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots$$

Una sucesión se dice *convergente* si posee límite, es decir, los términos van acercándose a un valor, llamado *límite de la sucesión*, tanto como se quiera.

Si se parte de una sucesión $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ y se efectúan las sumas parciales, es decir las sumas de los primeros términos

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

se obtiene otra sucesión, $\{s_n\}$, que se llama *serie* correspondiente a la sucesión $\{a_n\}$. Por abuso de lenguaje se identifica la serie con la suma de los términos de la sucesión y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

La serie se dice que es *convegente* si lo es la sucesión de sumas parciales, en otro caso se dice que es *divergente.*

La teoría de series y los numerosos criterios de convergencia se encuentran en los libros de Cálculo infinitesimal, por ejemplo en [2].

2. Series geométricas

Las series geométricas son de la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots ,$$

donde a y r son números reales fijos. El número r se llama razón de la serie.

El estudio de este tipo de series no es complicado y su convergencia está dada por la siguiente proposición.

Proposición *Dado el número real $a \neq 0$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ es convergente si, y solamente si, es $|r| < 1$. Además, cuando la serie converge tiene por suma $S = \frac{a}{1-r}$.*

DEM: La suma parcial n-ésima es

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

y en el caso en que es $|r| < 1$ el límite vale

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \lim_n \frac{ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r},$$

ya que $\lim_n r^n = 0$. En el caso en que es $|r| > 1$ se tiene que

$$|s_n| = \left|\frac{a - ar^n}{1-r}\right| \geq \left|\frac{ar^n}{1-r}\right| - \left|\frac{a}{1-r}\right|$$

y como $\lim_n |r|^n = +\infty$, la serie es divergente. Lo mismo ocurre en los casos $r = 1$ y $r = -1$. $\square$

EJEMPLO 1 La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^{n-1}}$ es geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$ y por tanto su suma es

$$S = \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{12}{2} = 6.$$

EJEMPLO 2 La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{3}$ es también geométrica de razón $r = 4$ y por tanto diverge siendo su suma $S = +\infty$.

3. Series aritmético-geométricas

Se llaman así a las series de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ donde son $a_n = a_{n-1} + d$ y $b_n = b_{n-1} r$. Es decir, a_n es el término general de una progresión aritmética de diferencia d y b_n es el término general de una progresión geométrica de razón r.

La convergencia de estas series se establece en la siguiente proposición.

Proposición *La serie aritmético-geométrica* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *converge si es* $|r| < 1$, *siendo su suma*

$$S = \left[\frac{a_1}{1-r} + \frac{d \cdot r}{(1-r)^2}\right] \cdot b_1.$$

Dem: La sucesión de sumas parciales es $s_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n$ y multiplicando por r se tiene

$$r s_n = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_n r.$$

Restando estas igualdades resulta

$$\begin{aligned}
(1-r)s_n &= a_1 b_1 + (a_2 - a_1) b_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1}) b_n - a_n b_n r = \\
&= a_1 b_1 + d(b_2 + \cdots + b_n) - a_n b_n r = \\
&= a_1 b_1 + d b_1 r (1 + r + \cdots + r^{n-2}) - [a_1 + (n-1)d] b_1 r = \\
&= \left[a_1 + dr \frac{1 - r^{n-1}}{1-r} - (a_1 + dn - d) r^n\right] b_1 = \left[a_1 + \frac{dr}{1-r} - (a_1 + dn) r^n\right] b_1
\end{aligned}$$

y si es $|r| < 1$ se tiene que

$$\lim_n (a_1 + dn) r^n = 0,$$

por lo que la serie converge en ese caso y su suma es

$$S = \lim_n s_n = \left[\frac{a_1}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}\right] b_1.$$

En el caso $|r| \geq 1$ no se cumple la condición necesaria de convergencia, ya que es

$$\lim_n |a_n b_n| = \lim_n |a_1 + (n-1)d| \cdot |b_1| \cdot |r|^{n-1} = +\infty,$$

y la serie es divergente. $\square$

Ejemplo 3 La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2(5n-1)}{3^{n-1}}$ es aritmético-geométrica siendo $a_n = 5n-1$, con diferencia $d = 5$, la parte aritmética y $b_n = \frac{2}{3^{n-1}}$ con $r = \frac{1}{3}$ la parte geométrica. Como es $|r| = |\frac{1}{3}| < 1$ la serie converge y tiene por suma

$$S = \left[\frac{4}{1-\frac{1}{3}} + \frac{5 \cdot \frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2}\right] \cdot 2 = \left(6 + \frac{15}{4}\right) \cdot 2 = \frac{39}{2}\cdot$$

Orden de una serie aritmético-geométrica

El orden de una serie es el grado del polinomio de su parte aritmética.

Ejemplo 4 Las series

$$\sum nr^n, \qquad \sum (n+2)r^{n-1}, \qquad \sum (n-1)r^{n+1},$$

son de primer orden. Las series

$$\sum n^2 r^n, \qquad \sum n(n-1)r^{n-1}, \qquad \sum (n-1)(n-2)r^{n+1},$$

son de segundo orden. Las series

$$\sum n^3 r^n, \qquad \sum n(n+1)(n+2)r^{n-1}, \qquad \sum (n-1)^3 r^{n+1},$$

son de tercer orden.

Suma de las series

La suma de las series aritmético-geométricas puede calcularse a partir de la geométrica, por derivación. Suponiendo que es $|r| < 1$, y sabiendo que la suma de la geométrica es

$$\sum_{n=3}^{\infty} r^{n-1} = \frac{r^2}{1-r},$$

derivamos la expresión y resulta

$$\sum_{n=3}^{\infty} (n-1)r^{n-2} = \frac{2r(1-r)+r^2}{(1-r)^2} = \frac{2r-r^2}{(1-r)^2}\cdot$$

Si ahora volvemos a derivar, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2)r^{n-3} &= \frac{(1-r)^2(2-2r)+(2r-r^2)2(1-r)}{(1-r)^4} = \\ &= \frac{2(1-r)^2+2(2r-r^2)}{(1-r)^3} = \frac{2-4r+2r^2+4r-2r^2}{(1-r)^3} = \frac{2}{(1-r)^3}.\end{aligned}$$

que nos da la suma de una serie aritmético-geométrica de segundo orden.

En el caso en que no sean $n-1$ y $n-2$, los factores de la parte aritmética que queramos calcular, se puede hacer un ajuste de índices. Por ejemplo, escribiendo la siguiente serie en la forma

$$\sum nr^{n-2} = \sum(n-1+1)r^{n-2} = \sum(n-1)r^{n-2} + \sum r^{n-2},$$

podemos expresar la suma de la serie $\sum nr^{n-2}$ como suma de la aritmético-geométrica $\sum(n-1)r^{n-2}$ y la geométrica $\sum r^{n-2}$, conocidas ambas.

4. Otro enfoque

Las fórmulas de las sumas de las series aritmético-geométricas pueden obtenerse también directamente, como vemos a continuación:

Primer orden: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$, con $|r| < 1$, haciendo

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + 5r^4 + \cdots \\ rS & = & \quad\; r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + 5r^5 + \cdots \\ \hline S - rS = (1-r)S & = & 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-r} \end{array}$$

de donde se obtiene

$$S = \frac{1}{(1-r)^2}$$

que no necesita ajuste de índices porque se puede poner lo que se quiera.

Segundo orden: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 r^{n-1}$, con $|r| < 1$, haciendo

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + 4r + 9r^2 + 16r^3 + \cdots \\ rS & = & \quad\; r + 4r^2 + 9r^3 + 16r^4 + \cdots \\ \hline S - rS = (1-r)S & = & 1 + 3r + 5r^2 + 7r^3 + \cdots \quad (1) \end{array}$$

donde (1) es de primer orden, volviendo a multiplicar por r :

$$r(1-r)S = r + 3r^2 + 5r^3 + 7r^4 + \cdots \quad (2),$$

restando $(1)-(2)$ queda

$$\begin{aligned}(1-r)S - r(1-r)S &= (1-r)(S-rS) = \\ &= 1 + 2r + 2r^2 + 2r^3 + 2r^4 + \cdots = \\ &= 1 + 2r(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots) = 1 + 2r \cdot \frac{1}{1-r},\end{aligned}$$

de donde resulta

$$S = \frac{1}{(1-r)^2} + \frac{2r}{(1-r)^3}.$$

En el caso de series aritmético-geométricas de orden mayor, se puede proceder de igual modo. Multiplicando por $(1-r)$ y restando el resultado de la suma anterior, siempre con la ventaja de poner los índices deseados desde el principio.

5. Ejercicios de Cálculo de probabilidades

1. Dos jugadores A y B tiran simultáneamente un dado cada uno. Gana el primero que obtenga un 6. Calcula:
a) La probabilidad de que A y B empaten.
b) La probabilidad de que gane A.
c) La probabilidad de que gane B.

Resolución

a) El número de lanzamientos hasta obtener un 6 tiene como probabilidad

$$P(X=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6},$$

ya que al obtener un 6 se acaba. Es una binomial con $p = \frac{1}{6}$ y $q = \frac{5}{6}$.

El juego termina cuando aparece un 6. La probabilidad de que A lo obtenga en el lanzamiento n es

$$P(X=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

que corresponde a $n-1$ fracasos seguidos de un éxito, y para B es lo mismo

$$P(Y=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

Por ser sucesos independientes, la probabilidad de que lo obtengan en el mismo lanzamiento y empaten es

$$\begin{aligned} P(X &= Y = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n)\cdot P(Y=n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\right]^2 = \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} = \\ &= \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{1}{36-25} = \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

b) La probabilidad de que A gane es

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X=n, Y>n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[P(X=n)\sum_{k=n+1}^{\infty}P(Y=k)\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\right)\right] = \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}\right] = \frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{6}} = \\ &= \frac{6}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{36}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{5}{11}. \end{aligned}$$

c) La probabilidad de que gane B es la misma, $\frac{5}{11}$. Sabiendo que A y B tienen igual probabilidad de ganar, bastaría haber restado

$$1-\frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

y dividir esta probabilidad entre ellos.

2. Dos jugadores realizan un juego bajo las siguientes condiciones: alternativamente extraen una bola de una urna que contiene p bolas blancas y q bolas negras. El primero que consiga bola blanca gana el juego. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador que comienza a jugar sea el ganador?

Resolución

Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} A_i &= \text{“\textit{el jugador A saca bola blanca en su i-ésimo intento}”}, \\ B_i &= \text{“\textit{el jugador B saca bola blanca en su i-ésimo intento}”}. \end{aligned}$$

Primer caso

Si se trata de extracciones con reposición la probabilidad de que A gane es

$$\begin{aligned} P &= P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap A_3) + \cdots = \\ &= \frac{p}{p+q} + \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 \frac{p}{p+q} + \left(\frac{q}{p+q}\right)^4 \frac{p}{p+q} + \cdots = \\ &= \frac{p}{p+q}\left[1 + \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 + \left(\frac{q}{p+q}\right)^4 + \cdots\right] = \frac{p}{p+q} \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p+q}\right)^2} = \frac{p+q}{p+2q}, \end{aligned}$$

ya que los términos del corchete forman una serie geométrica ilimitada con razón menor que 1.

Segundo caso

Si se trata de extracciones sin reposición las probabilidades van cambiando a medida que se extraen las bolas y dependerá de si el número de bolas negras es par o impar. Tenemos que

$$\begin{aligned} P &= P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap A_3) + \cdots = \\ &= \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} \frac{q-1}{p+q-1} \frac{p}{p+q-2} + \\ &\quad + \frac{q}{p+q} \frac{q-1}{p+q-1} \frac{q-2}{p+q-2} \frac{q-3}{p+q-3} \frac{p}{p+q-4} + \cdots + \\ &\quad + \frac{q}{p+q} \frac{q-1}{p+q-1} \frac{q-2}{p+q-2} \cdots \frac{3}{p+3} \frac{2}{p+2} m \end{aligned}$$

donde m es

$$m = \begin{cases} \frac{1}{p+1}\frac{p}{p}, & \text{si } q \text{ es par}, \\ \frac{p}{p+1}, & \text{si } q \text{ es impar}, \end{cases}$$

ya que si el número de bolas negras es par y se sacan primero todas las negras, la primera blanca la sacará el primer jugador cuando queden p bolas blancas y ninguna negra, mientras que si el número de negras es impar, el primer jugador ganará si saca bola blanca cuando quedan $p+1$ bolas, siendo p blancas y una negra.

En consecuencia, en el caso q impar, la probabilidad vale

$$\begin{aligned} P \;=\; & \frac{p}{p+q}\left[1+\frac{q(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{(p+q-1)(p+q-2)(p+q-3)(p+q-4)}+\right. \\ & \left. +\cdots+\frac{q(q-1)(q-2)\cdots 3\cdot 2}{(p+q-1)(p+q-2)\cdots(p+3)(p+2)(p+1)}\right] \end{aligned}$$

y en el caso en que q es par, basta añadir p en el denominador de la última fracción. No hay una expresión sencilla más breve para expresar el valor de la probabilidad.

3. Dos personas A y B realizan el siguiente juego: Tiran un dado y A gana si la tirada si sale un 1 o un 2, ganando B en los restantes casos. Se ponen de acuerdo en que ganará el juego el primero que gane dos tiradas consecutivas. ¿Qué probabilidad tiene cada uno de ganar el juego?

Resolución

Primer método: En cada tirada A gana con probabilidad $1/3$ y B con probabilidad $2/3$. Sea el suceso

$$A_n = \text{"}A \textit{ gana en la tirada } n\text{"}.$$

A_2 ocurre en la secuencia AA, cuya probabilidad es

$$P(A_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

A_3 ocurre en la secuencia BAA, con probabilidad

$$P(A_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3}.$$

A_4 ocurre en la secuencia $ABAA$, con probabilidad

$$P(A_4) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

A_{2m} ocurre en la secuencia $\underbrace{ABAB\cdots AB}_{2m-2}AA$ con probabilidad

$$P(A_{2m}) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{m-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

A_{2m+1} ocurre en la secuencia $\underbrace{BABA\cdots BA}_{2m}A$ con probabilidad

$$P(A_{2m+1}) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{m}\cdot\frac{1}{3}.$$

Todos los A_i son incompatibles dos a dos, luego

$$\begin{aligned} P(\textit{Gane } A) &= \sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_{2m}) + \sum_{m=1}^{\infty} P(A_{2m+1}) = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{m-1} + \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^{m} = \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{1}{9-2} + \frac{2}{3(9-2)} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

La probabilidad de que empaten es $ABABAB\cdots$ o bien $BABABA\cdots$, es decir

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdots = \lim_n\left(\frac{2}{9}\right)^n + \lim_n\left(\frac{2}{9}\right)^n = 0.$$

Como el empate tiene una probabilidad nula, sera

$$P(\textit{Gane } B) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}.$$

Segundo método: Si la última tirada ha ganado A, la probabilidad de que A gane el juego es p tal que

$$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}p,$$

luego $p = \frac{3}{7}$, pero si la última la ganó B, la probabilidad de que A gane el juego es q tal que

$$q = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}q\right),$$

luego es $q = \frac{1}{7}\cdot$ Como las probabilidades de estas situaciones son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, por probabilidad total resulta

$$P(Gane\ A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{3}{21}+\frac{2}{21} = \frac{5}{21}\cdot$$

4. Dos jugadores *A* y *B* juegan, alternativamente, partidas. Gana el juego el primer jugador que consigue ganar una partida. La probabilidad de que gane *A* en sus partidas es p_1, y la probabilidad de que gane *B* en las suyas es p_2, con $p_2 > p_1$. Para compensar su ventaja, *B* deja que *A* juegue la primera partida. ¿Qué relación deben cumplir p_1 y p_2 para que el juego sea justo, ésto es, para que *A* y *B* tengan la misma probabilidad de ganar el juego?

Resolución

A solo puede ganar en jugadas impares, sea

$$A_{2n+1} = \text{ "}A \textit{ gana en la tirada } 2n+1\text{"},$$

la probabilidad es

$$P(A_{2n+1}) = (1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1,$$

luego

$$\begin{aligned} P(A\ gane) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A_{2n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p_1)^n(1-p_2)^n p_1 = \\ &= p_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^n = p_1\cdot\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)} = \\ &= \frac{p_1}{1-1+p_1+p_2-p_1p_2} = \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donde hemos igualado a $1/2$ porque el juego debe ser justo. Por tanto

$$p_1+p_2-p_1p_2 = 2p_1, \quad \text{es decir} \quad p_2-p_1p_2 = p_1$$

de donde queda

$$p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$$

que es la relación pedida.

5. Tres personas lanzan sucesivamente un dado. La primera persona que saque un 5 ó un 6, gana. ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar el juego?

Resolución

Cada uno de ellos tiene probabilidad de ganar $1/3$. Sea el suceso $A_{3n+1} =$ "A *gana en la tirada* $3n+1$", es

$$P(A_{3n+1}) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3},$$

de donde resulta que

$$P(Gane\ A) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{27}\right)^n \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{8}{27}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{27-8} = \frac{9}{19}.$$

Sea el suceso $B_{3n+2} =$ "B *gana en la tirada* $3n+2$", es

$$P(B_{3n+2}) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3},$$

luego

$$P(Gane\ B) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{27}\right)^n \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\cdot\frac{27}{27-8} = \frac{6}{19}.$$

Sea el suceso $C_{3n+3} =$ "C *gana en la tirada* $3n+3$", es

$$P(C_{3n+3}) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3},$$

resultando

$$P(Gane\ C) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{27}\right)^n \frac{4}{27} = \frac{4}{27}\cdot\frac{27}{27-8} = \frac{4}{19}.$$

Es evidente que

$$\frac{9}{19}+\frac{6}{19}+\frac{4}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

ya que la probabilidad de empatar es nula.

6. Tres personas A, B y C lanzan sucesivamente y en ese orden un dado. Gana la primera persona que saque un seis.

a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?

b) Calcula la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente anteriores.

Resolución

a) La probabilidad de obtener 6 en el lanzamiento de un dado es $\frac{1}{6}\cdot$ Como los jugadores van echando el dado por orden, consideramos los sucesos

$$\begin{aligned} A_{3n+1} &= \text{“}A \textit{ gana en la tirada } 3n+1\text{”} \\ B_{3n+2} &= \text{“}B \textit{ gana en la tirada } 3n+2\text{”} \\ C_{3n+3} &= \text{“}C \textit{ gana en la tirada } 3n+3\text{”}, \end{aligned}$$

con probabilidades

$$\begin{aligned} P(A_{3n+1}) &= \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)^n\cdot\frac{1}{6} \\ P(B_{3n+2}) &= \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)^n\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} \\ P(C_{3n+3}) &= \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)^n\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} P(A\,gane) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{3n+1}) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{125}{216}\right)^n = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{125}{216}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{216}{216-125} = \frac{1}{6}\cdot\frac{216}{91} = \frac{36}{91}, \end{aligned}$$

$$P(B\,gane) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_{3n+2}) = \frac{5}{36}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{125}{216}\right)^n = \frac{5}{36}\cdot\frac{216}{91} = \frac{30}{91},$$

$$P(C\,gane) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(C_{3n+3}) = \frac{25}{216}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{125}{216}\right)^n = \frac{25}{216}\cdot\frac{216}{91} = \frac{25}{91}\cdot$$

Naturalmente se verifica que

$$\frac{36}{91}+\frac{30}{91}+\frac{25}{91}=\frac{91}{91}=1,$$

ya que no puede haber empate.

b) Se pide que el juego acabe en el décimo lanzamiento y que además el jugador C saque la suma de A y B en sus tres lanzamientos. Debe por tanto repetirse tres veces el ciclo ABC sin éxito y luego ganar A :

$$ABC \quad ABC \quad ABC \quad A.$$

En cada secuencia ABC hay 6^3 resultados posibles, el jugador A debe sacar menor que 5 y B algo con suma menor que 6, es decir

A puede sacar	B puede sacar	C la suma es
4	1	5
3	1-2	-
2	1-2-3	-
1	1-2-3-4	-

luego los casos favorables son $1+2+3+4=10$, es decir la probabilidad de una secuencia ABC cumpliendo los requisitos es

$$\frac{10}{6^3}=\frac{10}{216}$$

y la probabilidad de tres secuencias y un éxito de A es

$$p=\left(\frac{10}{216}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{5^3}{6\cdot 108^3}=\frac{125}{7\;558\;272}.$$

7. Se tienen n urnas, cada una de las cuales contiene a bolas blancas y b negras. Se elige al azar una bola de la primera urna y se pasa a la segunda; a continuación se pasa al azar una bola de la segunda a la tercera, y así sucesivamente. Finalmente, se extrae una bola de la última urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraida sea blanca?

Resolución

Sea $p_k =$ *"probabilidad de extraer B en la urna U_k "*. Es claro que

$$p_1 = \frac{a}{a+b}$$

y por probabilidad total es

$$p_k = p_{k-1}\frac{a+1}{a+b+1} + (1-p_{k-1})\frac{a}{a+b+1} = \frac{a}{a+b+1} + \frac{1}{a+b+1}\,p_{k-1}$$

que es una ecuación recurrente. Si escribimos

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{a}{a+b+1} + \frac{1}{a+b+1}\,p_{n-1} = \\
&= \frac{a}{a+b+1} + \frac{1}{a+b+1}\left(\frac{a}{a+b+1} + \frac{1}{a+b+1}\,p_{n-2}\right) = \\
&= \frac{a}{a+b+1} + \frac{a}{(a+b+1)^2} + \frac{1}{(a+b+1)^2}\,p_{n-2} = \cdots = \\
&= \frac{a}{a+b+1} + \frac{a}{(a+b+1)^2} + \cdots + \frac{a}{(a+b+1)^{n-1}} + \frac{1}{(a+b+1)^{n-1}}\,p_1
\end{aligned}$$

los $n-1$ primeros sumandos son una progresión geométrica y p_1 es conocido, luego

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{\dfrac{a}{a+b+1} - \dfrac{a}{(a+b+1)^n}}{1 - \dfrac{1}{a+b+1}} + \frac{a}{(a+b+1)^{n-1}(a+b)} = \\
&= \frac{\dfrac{a}{a+b+1} - \dfrac{a}{(a+b+1)^n}}{\dfrac{a+b}{a+b+1}} + \frac{a}{(a+b+1)^{n-1}(a+b)} = \\
&= \frac{a}{a+b} - \frac{a}{(a+b+1)^{n-1}(a+b)} + \frac{a}{(a+b+1)^{n-1}(a+b)} = \frac{a}{a+b}.
\end{aligned}$$

Resulta que la probabilidad p_n coincide por p_1, es decir, permanece constante.

8. Un juego de dados tiene las siguientes reglas:
- Se tiran dos dados equilibrados hasta que sumen 4 o 7.
- Si suman 4 gana el tirador, mientras que pierde si la suma es 7.
¿Cuál es la probabilidad de ganar en este juego?

RESOLUCIÓN:

Al tirar dos dados se pueden considerar 36 casos posibles. La suma 4 aparece en tres casos, 1+3, 2+2 y 3+1. La suma 7 aparece en seis casos, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 y 6+1. Por tanto tenemos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} p(\textit{sacar 4}) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \qquad p(\textit{sacar 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\ p(\textit{ni 4, ni 7}) &= 1 - p(\textit{no 4}) - p(\textit{no7}) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Se entiende que hay un solo jugador que puede ganar o perder según la suerte que tenga. Gana cuando saque 4, pierde en cuanto salga un 7, y cuando no salga ni 4 ni 7, continuará lanzando.

Sea N el suceso "*no sale ni 4 ni 7*". Cada tirada de los dados es independiente del resultado del lanzamiento anterior, por lo que no es preciso considerar probabilidad condicionada. Sea A_n el suceso "*el jugador gana en el lanzamiento n*".

Las probabilidades de que A gane en los sucesivos lanzamientos son:

$$\begin{aligned} p(A_1) &= \frac{1}{12} \\ p(A_2) &= p(N)p(\textit{sacar 4}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} \\ p(A_3) &= [p(N)]^2 p(\textit{sacar 4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} \\ p(A_4) &= [p(N)]^3 p(\textit{sacar 4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{12} \\ &\vdots \\ p(A_n) &= [p(N)]^{n-1} p(\textit{sacar 4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{12} \end{aligned}$$

así la probabilidad de que gane el juego es

$$\begin{aligned}
p(A\ gane) &= p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+\cdots+p(A_n)+\cdots= \\
&= \frac{1}{12}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{12}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{12}+\cdots= \\
&= \frac{1}{12}\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\cdots\right]= \\
&= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{4-3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

La probabilidad de perder en ese juego solitario es por tanto de $2/3$.

9. Dos jugadores *A* y *B* apuestan en un cierto juego equitativo 32 euros cada uno. El juego se desarrolla por partidas y gana la apuesta el primero que consiga cinco partidas. Cuando el primero ha ganado tres partidas y el segundo dos, el juego se interrumpe. ¿Cómo hay que repartir las cantidades apostadas para ser justos?

RESOLUCIÓN

Este es el *problema de los repartos* de Pascal-Fermat. El dinero debe repartirse de acuerdo a la probabilidad de ganar que tiene cada uno.

A puede ganar si gana las dos siguientes: $A\underline{A}$, o si gana dos de las tres siguientes, lo que puede ocurrir de dos formas: $AB\underline{A}$, $BA\underline{A}$, o si gana dos de las cuatro siguientes, lo que puede ocurrir de tres formas: $ABB\underline{A}$, $BAB\underline{A}$, $BBA\underline{A}$, por tanto

$$\begin{aligned}
P(Gane\ A) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4= \\
&= \frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}=\frac{4+4+3}{16}=\frac{11}{16}.
\end{aligned}$$

La esperanza matemática será por ello

$$E[A]=64\cdot\frac{11}{16}+0\cdot\frac{5}{16}=44\ €$$

y los otros 20 € deben ser para el jugador B que tiene $\dfrac{5}{16}$ como probabilidad de ganar.

Este ejercicio es un clásico y se conoce como el *problema de los repartos*. El origen del problema está en la correspondencia mantenida entre Fermat y Pascal, que en 1654 tratan este problema y Pascal consigue su correcta solución. Un resumen de esos estudios puede encontrarse en [3]. Una versión más detallada del problema está en [1].

10. Se realiza un juego entre dos jugadores *A* y *B*. En cada partida, la probabilidad de que gane el juego el jugador *A* es *p*, la probabilidad de que gane el jugador *B* es *q*, y la probabilidad de que queden en empate es *r*. Gana el juego el jugador que gana dos partidas. Calcule la probabilidad de que gane el juego el jugador *A*.

RESOLUCIÓN

Consideramos los sucesos $A_i =$ "*A gana en la jugada i-ésima*". Se tiene que

$$P(A_2) = p^2 \quad \text{y si es} \quad i \geq 3,\ A_i \text{ gana si}$$

1^o) Es $A\underbrace{EE...E}_{i-2}$ con probabilidad $p \cdot r^{i-2}$, que puede suceder de $i-1$ formas, ya que

$$PR_{i-1}^{1,i-2} = \binom{i-1}{i-2} = i-1.$$

2^o) Es $AB\underbrace{EE...E}_{i-3}$ con probabilidad $pq \cdot r^{i-3}$, que puede suceder de

$$2 \cdot \binom{i-1}{2} = VR_{i-1}^2 = (i-1)(i-2) \text{ formas, o bien } PR_{i-1}^{1,1,i-3} = (i-1)(i-2).$$

Luego

$$P(A_i) = (i-1)pr^{i-2}p + (i-1)(i-2)pqr^{i-3}p.$$

Por tanto resulta

$$\begin{aligned} P(A\ gane) &= P(A_2) + \sum_{i=3}^{\infty} P(A_i) = \\ &= p^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \left[(i-1)p^2 r^{i-2} + (i-1)(i-2)p^2 q r^{i-3} \right] = \\ &= p^2 + p^2 \sum_{i=3}^{\infty} (i-1) r^{i-2} + p^2 q \sum_{i=3}^{\infty} (i-1)(i-2) r^{i-3} = \end{aligned}$$

Estas dos series son aritmético-geométricas, una de primer orden y otra de segundo, y sus sumas están calculadas por derivación de la serie geométrica en la página 6, en la Sección *Suma de las series*. Poniendo lo que valen sus sumas queda

$$\begin{aligned} &= p^2 + p^2 \frac{r(2-r)}{(1-r)^2} + p^2 q \frac{2}{(1-r)^3} = \\ &= \frac{p^2}{(1-r)^2} \left[(1-r)^2 + r(2-r) + \frac{2q}{1-r} \right] = \frac{p^2}{(1-r)^2} \left(1 + \frac{2q}{1-r} \right). \end{aligned}$$

11. Se dispara sobre un blanco, sin limitar el número de disparos, hasta dar en él. Halla la esperanza matemática y la varianza del número de disparos efectuados.

Resolución

Sea p la probabilidad de dar en el blanco en un disparo, es decir,

$$P(dar) = p, \quad P(no\ dar) = q = 1 - p,$$

y sea X el número de disparos necesarios hasta dar en el blanco. Se tiene:

$$\begin{aligned} P(X &= 1) = p \\ P(X &= 2) = qp \\ P(X &= 3) = q^2 p \\ P(X &= 4) = q^3 p \\ &\vdots \\ P(X &= n) = q^{n-1} p \\ &\vdots \end{aligned}$$

por tanto la esperanza matemática es

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p = p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \\
&= p(1+2q+3q^2+4q^3+...+nq^{n-1}+...) = \\
&= (1-q)(1+2q+3q^2+4q^3+...+nq^{n-1}+...) = \\
&= 1+2q+3q^2+4q^3+...+nq^{n-1}+... \\
& \quad -q-2q^2-3q^3-...-nq^n-... = \\
&= 1+q+q^2+q^3+...+q^n+... = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p},
\end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta la suma de una serie geométrica ilimitada con razón q tal que $0 < q < 1$.

Para hallar la varianza, calculemos primero la esperanza de X^2 :

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1}p = p\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} = \\
&= (1-q)(1+2^2q+3^2q^2+4^2q^3+...+n^2q^{n-1}+...) = \\
&= 1+2^2q+3^2q^2+4^2q^3+...+n^2q^{n-1}+... \\
& \quad -q-2^2q^2-3^2q^3-...-n^2q^n-... = \\
&= 1+(2^2-1^2)q+(3^2-2^2)q^2+(4^2-3^2)q^3+...+((n+1)^2-n^2)q^n+... = \\
&= 1+(2-1)(2+1)q+(3-2)(3+2)q^2+(4-3)(4+3)q^3+ \\
& \quad +...+1(n+1+n)q^n+... = \\
&= 1+3q+5q^2+7q^3+...+(2n+1)q^n+...
\end{aligned}$$

Hemos visto en la Sección 3 que la suma de los infinitos términos de la serie aritmético-geométrica de primer orden

$$a_1b_1, \quad (a_1+d)b_1r, \quad (a_1+2d)b_1r^2, \quad ...,$$

siendo $|r| < 1$ para que sea convergente, vale

$$S = \left[\frac{a_1}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}\right] b_1,$$

por tanto resulta

$$E[X^2] = \left[\frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2}\right] \cdot 1 = \frac{1-q+2q}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2}$$

y entonces para la varianza se tiene que

$$\begin{aligned}\text{Var }[X^2] &= E[X^2] - (E[X])^2 = \\ &= \frac{1+q}{(1-q)^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1+(1-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.\end{aligned}$$

12. Se lanza un dado hasta que aparecen tres resultados distintos. ¿Cuál es el número medio de lanzamientos que es preciso realizar?

Resolución

Nos piden la esperanza de la variable

$$X = \text{“}\textit{número de lanzamientos necesarios}\text{”}.$$

Es claro que

$$P(X=3) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{36},$$

y también llegamos al mismo resultado por la regla de Laplace, ya que los casos posibles son $VR_6^3 = 6^3$ y los favorables al suceso son $V_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$, siendo entonces

$$P(X=3) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{20}{36}.$$

Para hallar $P(X=4)$, los casos posibles son $VR_6^4 = 6^4$ y para hallar los favorables con c final, como $abbc$, elegimos los otros dos de $\binom{5}{2}$ formas posibles y los permutamos de forma que siempre haya uno de cada de $PR_3^{2,1} = \binom{3}{1}$ formas, luego es

$$P(X=4) = \frac{6 \cdot \binom{5}{2} \cdot PR_3^{2,1} \cdot 2}{6^4} = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}2}{6^3},$$

donde el factor 2 viene de considerar las posibilidades como $abbc$ y $aabc$. En este caso no coinciden permutaciones con variaciones con repetición, es decir $PR_3^{2,1} \neq VR_2^3$, ya que ésta última contiene $aaac$ y $bbbc$, es decir dos más. Pero si valdría escribir $VR_2^3 - 2$.

Para hallar $P(X=k)$ son posibles $VR_6^k = 6^k$ casos y para hallar los favorables con c final, y luego multiplicar por 6, elegimos otros dos $\binom{5}{2}$, los colocamos de todas las formas posibles, con al menos uno de cada uno de ellos, y son

$$VR_2^{k-1} - 2 = 2^{k-1} - 2,$$

luego

$$P(X=k)=\frac{6\cdot\binom{5}{2}(2^{k-1}-2)}{6^k}=\frac{10(2^{k-1}-2)}{6^{k-1}}.$$

Por tanto la esperanza es

$$E[X]=\sum_{k=3}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{10k(2^{k-1}-2)}{6^{k-1}}=10\sum_{k=3}^{+\infty}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-20\sum_{k=3}^{+\infty}k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1},$$

series aritmético-geométricas convergentes pues $|\frac{1}{3}|<1$ y $|\frac{1}{6}|<1$, cuyas sumas son, sumando desde $k=1$ y quitando los valores de $k=1$ y $k=2$, respectivamente

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1-\frac{2}{3}\qquad \text{y}\qquad \frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2}-1-\frac{2}{6}.$$

En consecuencia resulta finalmente

$$\begin{aligned}
E[X] &= 10\left(\frac{9}{4}-1-\frac{2}{3}\right)-20\left(\frac{36}{25}-1-\frac{2}{6}\right)= \\
&= 10\ \frac{27-12-8}{12}-20\ \frac{216-150-50}{150}= \\
&= \frac{5\cdot 7}{6}-\frac{2\cdot 16}{15}=\frac{25\cdot 7-4\cdot 16}{30}=\frac{175-64}{30}=\frac{111}{30}=\frac{37}{10}=3,7.
\end{aligned}$$

Es decir, la media de lanzamientos necesarios es $3,7$ lanzamientos.

Nota

Los ejercicios 1 a 8 son de probabilidad condicionada y series geométricas. Los ejercicios 10 al 12 son de series aritmético-geométricas de primer y segundo orden. Algunos de estos ejercicios están tomados de [4], otros son ejercicios de oposiciones a Profesor de Enseñanza Secundaria.

Bibliografía

[1] García Merayo F. Pascal. Un genio precoz. *Ed. Nivola,* Madrid, 2007.

[2] Tomeo V, Uña I, San Martín J. Cálculo en una variable. *Ed. Garceta,* Madrid, 2010.

[3] Tomeo V, Torrano E. Triángulos y matrices de Pascal. Cuadernos de Trabajo de la Facultad de Estudios Estadísticos. Universidad Complutense de Madrid, CT 01-2020, Madrid, 2020.

[4] Uña I, Tomeo V, San Martín J. Cálculo de Probabilidades. *Ed Garceta,* Madrid, 2009.

Cuadernos de Trabajo
Facultad de Estudios Estadísticos

CT02/2020 **La princesa elige prometido y otros ejercicios de probabilidad**
Venancio Tomeo Perucha

CT01/2020 **Triángulos y matrices de Pascal**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT05/2019 **Cálculo de la resolvente y suma de productos combinados en el caso hermitiano**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT04/2019 **Relaciones entre las medias estadísticas: demostraciones**
Elena Castiñeira Holgado y Venancio Tomeo Perucha

CT03/2019 **Introducción a MAPLE. Versión 18**
Juan Julián Ávila Tejera

CT02/2019 **Breve historia del cálculo integral. Cálculo integral elemental**
Juan Julián Ávila Tejera

CT01/2019 **Matrices y polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT03/2018 **Las matemáticas en el cine**
Gloria Cabrera Gómez

CT02/2018 **Brecha madre-padre en el uso de las medidas de conciliación y su efecto sobre las carreras profesionales de las madres**
José Andrés Fernández Cornejo y Lorenzo Escot (Coordinadores)
Autores: José Andrés Fernández Cornejo, Lorenzo Escot, Eva María del Pozo, Sabina Belope Nguema, Cristina Castellanos Serrano, Miryam Martínez, Ana Bernabeu, Lorenzo Fernández Franco, Juan Ignacio Cáceres, María Ángeles Medina Sánchez

CT01/2018 **El campo de valores de una matriz y su aplicación a los polinomios ortogonales**
Venancio Tomeo Perucha y Emilio Torrano Giménez

CT02/2015 **Prospectiva del proceso electoral a Rector de la Universidad Complutense 2015. Resultados del sondeo de intención de voto en primera y segunda vuelta**
Lorenzo Escot Mangas, Eduardo Ortega Castelló, Lorenzo Fernández Franco y Kenedy Alba (Coordinadores)

CT01/2015 **The polemic but often decisive contribution of computer science to linguistic and statistical research on translation accuracy and efficiency**
Antonio Ñíguez Bernal

CT05/2014 **Las medidas estadísticas: ejercicios motivadores**
Almudena Pajares García y Venancio Tomeo Perucha

CT04/2014 **Jugando con la estadística (y la probabilidad)**

Gloria Cabrera Gómez

CT03/2014 **Análisis Estadístico de las Consultas a la Base de Datos de Ayudas e Incentivos a Empresas de la Dirección General de Industria y de la PYME.**
Adolfo Coello de Portugal Muñoz, Juana María Alonso Revenga

CT02/2014 **Values of games with weighted graphs**
E. González-Arangüena, C. Manuel; M. del Pozo

CT01/2014 **Estimación de la tasa de retorno de la carta del censa de los Estados Unidos a través del modelo de regresión lineal y técnicas de predicción inteligentes.**
José Luis Jiménez-Moro y Javier Portela García Miguel

CT03/2013 **Provisión de siniestros de incapacidad temporal utilizando análisis de supervivencia.**
Ana Crespo Palacios y Magdalena Ferrán Aranaz

CT02/2013 **Consumer need for touch and Multichannel Purchasing Behaviour.**
R. Manzano, M. Ferrán y D. Gavilán

CT01/2013 **Un método gráfico de comparación de series históricas en el mercado bursátil.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2012 **Calculando la matriz de covarianzas con la estructura de una red Bayesiana Gaussiana**
Miguel A. Gómez Villegas y Rosario Susi

CT02/2012 **What's new and useful about chaos in economic science.**
Andrés Fernández Díaz, Lorenzo Escot and Pilar Grau-Carles

CT01/2012 **A social capital index**
Enrique González-Arangüena, Anna Khmelnitskaya, Conrado Manuel, Mónica del Pozo

CT04/2011 **La metodología del haz de rectas para la comparación de series temporales.**
Magdalena Ferrán Aranaz

CT03/2011 **Game Theory and Centrality in Directed Social Networks**
Mónica del Pozo, Conrado Manuel, Enrique González-Arangüena y Guillermo Owen.

CT02/2011 **Sondeo de intención de voto en las elecciones a Rector de la Universidad Complutense de Madrid 2011**
L.Escot, E. Ortega Castelló y L. Fernández Franco (coords)

CT01/2011 **Juegos y Experimentos Didácticos de Estadística y Probabilidad**
G. Cabrera Gómez y Mª.J. Pons Bordería

CT04/2010 **Medio siglo de estadísticas en el sector de la construcción residencial**
M. Ferrán Aranaz

CT03/2010 **Sensitivity to hyperprior parameters in Gaussian Bayesian networks.**
M.A. Gómez-Villegas, P. Main, H. Navarro y R. Susi

CT02/2010 **Las políticas de conciliación de la vida familiar y laboral desde la perspectiva del empleador. Problemas y ventajas para la empresa.**
R. Albert, L. Escot, J.A. Fernández Cornejo y M.T. Palomo

CT01/2010 **Propiedades exóticas de los determinantes**
Venancio Tomeo Perucha

CT05/2009 **La predisposición de las estudiantes universitarias de la Comunidad de Madrid a auto-limitarse profesionalmente en el futuro por razones de conciliación**
R. Albert, L. Escot y J.A. Fernández Cornejo

CT04/2009 **A Probabilistic Position Value**
A. Ghintran, E. González–Arangüena y C. Manuel

CT03/2009 **Didáctica de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: Experimentos motivadores**
A. Pajares García y V. Tomeo Perucha

CT02/2009 **La disposición entre los hombres españoles a tomarse el permiso por nacimiento. ¿Influyen en ello las estrategias de conciliación de las empresas?**
L. Escot, J.A. Fernández-Cornejo, C. Lafuente y C. Poza

CT01/2009 **Perturbing the structure in Gaussian Bayesian networks**
R. Susi, H. Navarro, P. Main y M.A. Gómez-Villegas

CT09/2008 **Un experimento de campo para analizar la discriminación contra la mujer en los procesos de selección de personal**
L. Escot, J.A. Fernández Cornejo, R. Albert y M.O. Samam

CT08/2008 **Laboratorio de Programación. Manual de Mooshak para el alumno**
D. I. de Basilio y Vildósola, M. González Cuñado y C. Pareja Flores

CT07/2008 **Factores de protección y riesgo de infidelidad en la banca comercial**
J. Mª Santiago Merino

CT06/2008 **Multinationals and foreign direct investment: Main theoretical strands and empirical effects**
María C. Latorre

CT05/2008 **On the Asymptotic Distribution of Cook's distance in Logistic Regression Models**
Nirian Martín y and Leandro Pardo

CT04/2008 **La innovación tecnológica desde el marco del capital intelectual**
Miriam Delgado Verde, José Emilio Navas López, Gregorio Martín de Castro y Pedro López Sáez

CT03/2008 **Análisis del comportamiento de los indecisos en procesos electorales: propuesta de investigación funcional predictivo-normativa**
J. Mª Santiago Merino

CT02/2008 **Inaccurate parameters in Gaussian Bayesian networks**
Miguel A. Gómez-Villegas, Paloma Main and Rosario Susi

CT01/2008 **A Value for Directed Communication Situations.**
E. González–Arangüena, C. Manuel, D. Gómez, R. van den B

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID